Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional

Simetrias na Eletrodinâmica:
dualidades e o estudo da consistência de modelos massivos

Bruno Alves Marques

Orientador: Prof. Dr. Antônio Paulo Baêta Scarpelli
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Coorientador: Prof. Dr. Luiz Cleber Tavares Brito
Universidade Federal de Lavras

Belo Horizonte
Fevereiro de 2024

Bruno Alves Marques

Simetrias na Eletrodinâmica:
dualidades e o estudo da consistência de modelos massivos

Tese apresentado ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de concentração: Modelagem Matemática e Computacional.

Linha de pesquisa: Métodos Matemáticos Aplicados.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Paulo Baêta Scarpelli
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Coorientador: Prof. Dr. Luiz Cleber Tavares Brito
Universidade Federal de Lavras

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional
Belo Horizonte
Fevereiro de 2024

Marques, Bruno Alves
M357s Simetrias na eletrodinâmica: dualidades e o estudo da consistência de modelos massivos / Bruno Alves Marques. – 2024.
83 f.

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional.
Orientador: Antônio Paulo Baêta Scarpelli.
Coorientador: Luiz Cleber Tavares Brito.
Tese (doutorado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Simetria (Física) – Teses. 2. Violação de CP (Física nuclear) – Teses. 3. Dualidade (Física nuclear) – Teses. 4. Teoria de campos (Física) – Teses. I. Scarpelli, Antônio Paulo Baêta. II. Brito, Luiz Cleber Tavares. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

CDD 530.15

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6ª 1592 / Cefet/MG

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

"SIMETRIAS NA ELETRODINÂMICA: DUALIDADES E O ESTUDO DA CONSISTÊNCIA DE MODELOS MASSIVOS".

Tese de Doutorado apresentada por **Bruno Alves Marques,** em 29 de fevereiro de 2024, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do CEFET-MG, e aprovada pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Antônio Paulo Baêta Scarpelli (Orientador)
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Luiz Cleber Tavares Brito (Coorientador)
Universidade Federal de Lavras

Prof. Dr. Jean Carlos Coelho Felipe
Universidade Federal de São João del-Rei

Prof. Dr. Albert Petrov
Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. José Geraldo Peixoto de Faria
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Giancarlo Queiroz Pellegrino
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Visto e permitida à impressão,

Prof. Dr. Thiago de Souza Rodrigues
Coordenador do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em
Modelagem Matemática e Computacional

A Deus, família e todos que contribuíram.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela oportunidade, à família por estarem juntos em todos os momentos. A todos os professores que participaram da minha formação intelectual, em especial os professores do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional.

Agradeço ao amigo e parceiro de doutorado Bruno Zanotelli Felippe pelo companheirismo, conversas e compartilhamentos.

Agradeço ao orientador do mestrado Prof. Dr. José Angel Dávalos Chuquipoma, pela carta de recomendação.

Agradeço ao coorientador Prof. Dr. Luiz Cleber Tavares Brito, pela disponibilidade de tempo e a paciência com minhas limitações, por todos os encontros para sanar dúvidas e correções, na qual tiveram grandes contribuições para este resultado final.

Agradecimento especial ao orientador Prof. Dr. Antônio Paulo Baêta Scarpelli, por aceitar o pedido de orientação, pois sem o mesmo, não chegaríamos a este momento. Agradeço toda dedicação e esforço para o desenvolvimento da tese, agradeço o tempo disponibilizado, toda paciência, carinho e cuidado com as minhas dificuldades. Agradeço o compromisso com a orientação, demonstrando um profissionalismo de excelência.

Agradeço aos professores da banca de qualificação, Prof. Dr. Jean Carlos Coelho Felipe, Prof. Dr. Giancarlo Queiroz Pellegrino e Prof. Dr. Arthur Rodrigo Bosco de Magalhães pela disponibilidade em ler o projeto e apresentar contribuições para que o mesmo viesse a tornar uma tese de doutorado.

Agradeço a todos os funcionários do CEFET-MG que, de alguma forma, proporcionam o pleno funcionamento do PPGMMC e da instituição como um todo.

Por fim, agradeço o IFMG por proporcionar um período de 2 anos de afastamento das atividades para dedicar ao Doutorado.

Obrigado!!!

"Eu tentei 99 vezes e falhei, mas na centésima tentativa eu consegui, nunca desista de seus objetivos mesmo que esses pareçam impossíveis, a próxima tentativa pode ser vitoriosa." (Albert Einstein).

Resumo

Neste trabalho, são estudados modelos com extensões massivas da eletrodinâmica, seja por meio de teorias que violam a simetria de Lorentz ou não. Primeiramente, estudamos o caso particular de um modelo que, embora massivo, preserva uma invariância de calibre residual. É avaliada a consistência física do modelo por meio de suas equações de campo clássicas e da análise dos polos do propagador do campo vetorial. Em seguida, de uma forma mais geral, é estudada a equivalência física, nos níveis clássico e quântico, de modelos duais. Para a obtenção do modelo dual (invariante de calibre) à teoria original massiva, é utilizado o método iterativo de dualização de Noether. Em nível clássico, a equivalência física é investigada por meio do cálculo da seção de choque do espalhamento elétron-elétron (espalhamento Møller) em nível árvore. No caso quântico, apresentaremos a equivalência *on-shell* para uma amplitude simples de um *loop* e, em seguida, mostraremos que a equivalência é válida *off-shell*. Iniciaremos considerando a autoenergia do elétron de uma eletrodinâmica massiva estentida e de seu modelo dual invariante de calibre correspondente.

Palavras-chave: Dualidade; Violação de simetrias; Teoria de campos.

Abstract

In this work, models with massive extensions of electrodynamics are studied, either through theories that violate Lorentz symmetry or not. First, we study the particular case of a model that, although massive, preserves a residual gauge invariance. The physical consistency of the model is evaluated through its classical field equations and the analysis of the propagator poles of the vector field. Then, in a more general way, the physical equivalence, of dual models is studied, at the classical and quantum levels. To obtain the dual model (gauge invariant) to the original massive theory, the Noether dualization method is used. At the classical level, physical equivalence is investigated by calculating the electron-electron scattering cross section (Møller scattering) at tree level. In the quantum case, we will present the *on-shell* equivalence for a single *loop* amplitude and then we will show that the equivalence holds for *off-shell*. We will start by considering an electron self-energy of an extended massive electrodynamics and its corresponding gauge invariant dual model.

Keywords: Duality; Violation of symmetries.; Field theory.

Lista de Figuras

Figura 1 – Sistemas χ e χ' utilizados na dedução dos *boosts* de Lorentz unidimensionais. 20
Figura 2 – Espalhamento elétron-elétron para o modelo massivo original. 66
Figura 3 – Contribuições para o espalhamento férmion-fermion para o modelo dual. . . 67
Figura 4 – Diagrama de auto-energia para o férmion no modelo massivo original. . . . 68
Figura 5 – Contribuições para a auto-energia de um laço do férmion no modelo dual. . 69

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Álgebra dos operadores - Multiplicação de linhas por colunas 53

Lista de Abreviaturas e Siglas

TQC	Teoria Quântica de Campos.
MDN	Método Iterativo de Dualização de Noether.
QED	Eletrodinâmica Quântica.
CFJ	Carroll-Field-Jackiw.
CPT	Combinação das Transformações de Carga, Paridade e Temporal.
MP	Modelo Padrão.
MPE	Modelo Padrão Estendido.
RI	Regularização Implícita

Sumário

1 – Introdução **14**

2 – Equações Relativísticas **19**
2.1 Simetria de Lorentz 19
2.1.1 *Boosts* de Lorentz 19
2.1.2 Intervalo Invariante 21
2.1.3 Grupo de Lorentz 23
2.2 Equação de Klein–Gordon 25
2.3 Equação de Dirac 27
2.3.1 Matrizes de Dirac 27
2.3.2 Equação de Dirac para uma Partícula Livre 29

3 – Simetrias na Eletrodinâmica Quântica **33**
3.1 As Equações de Maxwell no Formalismo Covariante 33
3.2 Equações de Campo para o Quadrivetor Potencial 35
3.3 Simetria de Calibre 37
3.3.1 Simetria de Calibre Local na Eletrodinâmica 37
3.3.2 Prova da Invariânvia de Calibre na Teoria Clássica 39
3.4 Eletrodinâmica Massiva 40
3.5 Modelos com Violação da Simetria de Lorentz 41

4 – Dualização **43**
4.1 Escalar x Tensor 43
4.2 Dualidade Eletricidade x Magnetismo 45
4.3 Método Iterativo de Dualização de Noether 46
4.3.1 Descrição do Método 47
4.3.2 Aplicação do Método Iterativo de Dualização de Noether: Modelo Autodual de Deser e Jackiw 48

5 – Invariância de Calibre Residual em uma Eletrodinâmica Massiva com Violação da Simetria de Lorentz **51**
5.1 Determinação do Propagador do Campo de Calibre 52
5.2 Polos do Propagador no Espaço dos Momentos e Equações de Campo 54
5.3 Análise da Unitariedade 57
5.4 Invariância de Calibre Residual 58

6 – Equivalência entre Modelos Duais em Níveis Clássico e Quântico **60**

6.1 Dualização da Lagrangeana 60
6.2 Lagrangeana Dualizada com Operadores 62
6.3 Relação entre os Propagadores 64
6.4 Equivalência em Nível Árvore 65
6.5 Equivalência em Ordem de *Loops* Superiores 68

7 – Conclusão 72

Referências 74

Apêndices 78

APÊNDICE A – Desenvolvimento da Integral de Feynman 79
A.1 Parametrização de Feynman 79
A.2 Desenvolvimento da Integral 80

Anexos 81

ANEXO A – Regularização Implícita 82

1 Introdução

A Teoria Quântica de Campos (TQC) é a área da física que combina a Mecânica Quântica com a Teoria da Relatividade Especial. De maneira geral, a Mecânica Quântica é a teoria usada para descrever o comportamento de sistemas de dimensões muito pequenas, como elétrons, átomos e moléculas. Por sua vez, a Relatividade Especial (ou Restrita) se concentra na física de altas energias, que engloba sistemas ou partículas que se movem com velocidades comparáveis com a da luz. Importante notar que as interações de gravidade não estão incluídas neste caso, pois são descritas pela teoria mais completa, da Relatividade Geral.

Uma das interações mais importantes, descrita pelo eletromagnetismo, é bem entendida em sua versão clássica desde o fim do século XIX. Os desenvolvimentos de Faraday e outros culminaram com o trabalho de Maxwell em 1864. O eletromagnetismo de Maxwell, ao contrário da Mecânica Newtoniana, permanece válido para velocidades relativísticas. Além disso, o eletromagnetismo clássico, quando adequadamente costurado com a Mecânica Quântica, dá origem à Eletrodinâmica Quântica (QED - *Quantum Electrodynamics*), considerada a mais bem sucedida teoria até os dias de hoje, com uma notável convergência com os resultados experimentais. O sucesso da QED a tornou a teoria paradigmática, de forma que as formulações para as interações nucleares fraca e forte, também incluídas no Modelo Padrão (MP), são generalizações dos procedimentos adotados na Eletrodinâmica Quântica.

Da perspectiva atual, o fato crucial sobre o eletromagnetismo é que se trata de uma teoria na qual a dinâmica está intimamente relacionada a um princípio de simetria. De maneira simplificada, uma operação de simetria é algo que pode ser aplicado a um objeto de maneira que ele se apresente da mesma forma antes e depois. Do ponto de vista físico, a simetria se manifesta pela invariância das leis físicas diante de transformações matemáticas aplicadas a "objetos" da teoria. Exemplos na física geral são as invariâncias de todas as leis fundamentais sob translação e rotação dos sistemas. Tais exemplos, é importante observar, não se relacionam a nenhuma lei de força em particular, mas restringem a forma das leis permitidas. Contudo, há um tipo de simetria interna de modelos físicos que essencialmente determina as leis de força.

O papel dessas simetrias na determinação das leis de força apenas pode ser compreendido a partir da distinção entre os conceitos de invariância local e invariância global. Em uma situação de invariância global, a simetria existe quando uma mesma transformação é realizada em todos os pontos do espaço-tempo. Por outro lado, muito mais significante é uma invariância local, que ocorre quando diferentes transformações são realizadas em diferentes pontos do espaço-tempo. Quando uma invariância originalmente global é forçada a se tornar local, novos campos que ditarão as interações e que se transformam de uma maneira particular deverão ser introduzidos no modelo. A invariância local relevante no eletromagnetismo é a conhecida invariância de calibre das equações de Maxwell. No modelo quântico, esta propriedade está relacionada a transformações de fase locais nos campos quânticos. As teorias que podem ser construídas com

base neste conceito, a exemplo da Eletrodinâmica Quântica, são chamadas teorias de *gauge* (calibre, em português).

A invariância de calibre demorou a ser reconhecida como o princípio físico que governa as forças fundamentais entre as partículas elementares. Embora a ideia de invariância de calibre tenha sido proposta por Hermann Weyl em 1919, em uma época em que só se conheciam o elétron e o próton, foi apenas por volta de 50 anos depois que ela foi redescoberta e bem compreendida. A moderna teoria de calibre, então, emergiu como um dos mais significantes desenvolvimentos da física do século XX. Foi ela que nos permitiu pela primeira vez realizar, pelo menos em parte, o sonho de unificar as forças fundamentais da natureza.

Acredita-se que o fato de fótons não terem massa é uma consequência direta da invariância de calibre da QED. Contudo, a inclusão de fótons massivos em teoria de campos vem atraindo a atenção da comunidade científica. No que diz respeito ao caráter efetivo da simetria de calibre, é possível que os fótons tenham uma massa muito pequena, mas não nula. Neste sentido, estudos que estendem o eletromagnetismo de Maxwell têm sido realizados, principalmente, no contexto do modelo de Proca (ROBLES; CLARO, 2012; SPAVIERI et al., 2011).

Assim como a simetria de calibre, a invariância sob transformações de Lorentz é de fundamental importância na compreensão das interações entre as partículas elementares. Além disso, experimentos colocam fortes limitações na violação dessas simetrias. Contudo, não sendo essas invariâncias protegidas por primeiros princípios, especula-se que elas possam ser simetrias aproximadas de uma teoria mais fundamental que apresente o MP como uma descrição efetiva em baixas energias. A possibilidade de violação da simetria de Lorentz em altas energias foi originalmente considerada por Kostelecký e Samuel (KOSTELECKÝ; SAMUEL, 1989b; KOSTELECKÝ; SAMUEL, 1989a). Tal cenário para altíssimas energias, por exemplo, seria uma consequência natural de efeitos da gravitação quântica. Posteriormente, uma descrição geral da violação da simetria de Lorentz em Teorias Quânticas de Campos foi fornecida pelo Modelo Padrão Estendido (MPE) (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1997; COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1998), que estabelece um conjunto de parâmetros tensoriais cujas pequenas magnitudes são fortemente limitadas por experimentos.

Um dos trabalhos mais influentes no contexto de teorias de campo com violação da simetria de Lorentz foi desenvolvido por Carroll, Field e Jackiw (CFJ) (CARROLL; FIELD; JACKIW, 1990). Trata-se da modificação da eletrodinâmica pela inclusão de um termo do tipo Chern-Simons que viola as simetrias CPT (combinação das transformações de conjugação de carga, paridade e inversão temporal) e de Lorentz. Tal modelo gera uma massa topológica para o fóton, embora não viole a simetria de calibre da ação. Recentemente, foi apresentada uma nova proposta para gerar termos de massa em uma teoria de calibre, contextualizada em um modelo com violação da simetria de Lorentz introduzida pelo termo de CFJ (FELIPE et al., 2019). Em tal modelo, o termo de CFJ ocasiona o surgimento de uma contribuição de massa incomum na densidade Lagrangiana do fóton, gerando uma generalização da teoria de Proca. Enquanto na teoria usual de Proca ocorre apenas a quebra explícita da invariância de calibre, o modelo

generalizado da referência (FELIPE et al., 2019) sugere algum tipo de conexão entre a violação da simetria de Lorentz e a simetria de calibre.

Uma das propostas do presente trabalho é investigar mais a fundo a relação entre as simetrias de calibre e de Lorentz utilizando a ideia de dualidade entre teorias de campos. O conceito de dualidade é muito útil no estudo de modelos teóricos em diversas áreas da Física, que abrangem da matéria condensada às teorias quânticas de campos. Isso porque alguns modelos apresentam características ocultas que são evidentes no seu dual. Sendo os modelos duais aqueles diferentes na forma, mas equivalentes na descrição de um sistema físico, pode-se dizer que eles são complementares (HJELMELAND; LINDSTRöM, 1997): se um é mais adequado em determinado regime, em outra situação limite, o outro modelo se mostra mais efetivo. Torna-se, então, uma questão interessante saber se um determinado modelo possui um dual com as características desejadas. Além disso, relações de dualidade permitem o mapeamento de uma teoria com acoplamento fraco em outra com acoplamento forte, em função da implementação da relação entre acoplamentos elétrico e magnético.

A primeira relação estabelecida neste contexto foi a paradigmática dualidade entre o modelo autodual e o de Maxwell-Chern-Simons, no espaço-tempo tridimensional e foi discutida como uma característica genérica de uma ampla classe de modelos de teorias de campos. Desde então, diferentes métodos para estabelecer e estudar as relações de dualidade foram elaborados (HJELMELAND; LINDSTRöM, 1997).

Em teorias de campos, um dos procedimentos mais poderosos para a obtenção de teorias duais é a construção da chamada ação mestre (GOMES; MALACARNE; SILVA, 1998) que acomoda os dois campos. Os dois modelos são obtidos pelo uso das equações de movimento dos campos na ação original. Por outro lado, o método iterativo de dualização de Noether (MDN) (ANACLETO et al., 2001) é baseado na transformação de um modelo com violação da simetria de calibre em outro simétrico por meio da adição iterativa de contratermos que seriam nulos na camada de massa. No contexto proposto, o método é fortemente sugestivo de fornecer modelos duais, pois em todos os testes realizados até o momento, os modelos têm apresentado descrições equivalentes da física sob estudo (SCARPELLI et al., 2015), (FARGNOLI et al., 2014).

Primeiramente, o método se mostrou eficiente em fornecer o resultado esperado na dualidade entre o modelo autodual e o de Maxwell-Chern-Simons, no espaço-tempo tridimensional (DESER; JACKIW, 1984). Posteriormente, a técnica foi testada em diferentes modelos com violação da simetria de Lorentz (CANTCHEFF et al., 2003). Contudo, um resultado intrigante é que, embora os modelos duais apresentem o mesmo espectro físico, a teoria de calibre obtida a partir do MDN adquire novos modos que são fantasmas (que violam a unitariedade). Em (SCARPELLI; CANTCHEFF; HELAYëL-NETO, 2004) foi demonstrado que esse é um resultado geral quando o MDN é aplicado. Os tais modos fantasmas podem arruinar o modelo e alguns procedimentos têm sido adotados para evitar o seu aparecimento (DALMAZI, 2006). A demonstração de que a presença dos modos fantasmas não afetam os resultados físicos obtidos por meio dos modelos é um dos objetivos propostos por este trabalho.

Normalmente, o modelo original, que apresenta quebra da simetria de calibre, o faz por meio da presença de um termo de massa tipo Proca. O caso do termo de Proca é uma situação particular de um termo de massa mais geral, com a forma

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2} A^\mu M_{\mu\nu} A^\nu, \tag{1}$$

no qual o tensor de massa $M_{\mu\nu}$ envolve, geralmente, parâmetros de violação da simetria de Lorentz (FELIPE et al., 2019), (FARGNOLI et al., 2014). Há, contudo, casos de modelos massivos, cuja consistência física foi demonstrada, mas que possuem tensor de massa não inversível, o que, a princípio, impediria a obtenção de seu dual invariante de calibre. Uma possibilidade para lidar com essa situação seria a construção de novos procedimentos que contornem essa dificuldade. Entretanto, esse impedimento é intrigante e traz à tona a discussão sobre a real quebra completa da simetria de calibre em tais situações.

O desenvolvimento deste trabalho está contextualizado no âmbito geral das extensões da QED que incluem termos de massa, seja por meio de teorias com violação da simetria de Lorentz (CARROLL; FIELD; JACKIW, 1990; KOSTELECKÝ; SAMUEL, 1989a) ou não. Em uma das frentes, estudaremos o interessante caso citado acima que envolve um tensor de massa não inversível, o que sugere uma invariância de calibre residual.

Além disso, estamos interessados nas relações de dualidades de modelos que violam simetria de calibre por meio de um termo de massa com outros que respeitam esta simetria (TONIOLO et al., 2017; MARQUES et al., 2022b; MARQUES et al., 2022a). Particularmente, avaliamos a consistência física de modelos obtidos pelo MDN. Dentre os procedimentos adotados estão a análise das equações de campo clássicas e o estudo dos polos do propagador do campo vetorial. Com o intuito de avaliar a equivalência entre os modelos relacionados por meio deste tipo de dualidade, obtemos uma relação geral entre os propagadores de modelos duais nos casos em que o termo de massa $\frac{1}{2}A^\mu M_{\mu\nu}A^\nu$ envolve violação da simetria de Lorentz. Essa relação e os novos termos de interação são usados na análise da equivalência entre dois modelos de teoria de campos relacionados pelo MDN, por meio do cálculo da seção de choque do espalhamento elétron-elétron (espalhamento Møller) em nível de árvore. Tal equivalência também é demonstrada em processos quânticos. O interessante é que, quando se consideram também as alterações nas interações, ocorre o cancelamento das contribuições não físicas.

No que segue, o texto será organizado da seguinte forma. O Capítulo 2 apresenta as equações relativístivas como equação de Klein-Gordon e equação de Dirac. O Capítulo 3 aborda alguns conceitos de simetrias na Eletrodinâmica Quântica, como a simetria de calibre. Partindo para o Capítulo 4, apresentamos aspectos gerais sobre dualização. São discutidos, de forma geral, a dualidade escalar x tensor e a dualidade eletricidade e magnetismo e o método iterativo de dualização de Noether, que terá grande relevância neste trabalho. No Capítulo 5 discutimos a invariância de calibre residual em uma eletrodinâmica massiva com violação da simetria de Lorentz, analisando o propagador clássico do modelo, por meio dos seus respectivos polos. Esta parte do trabalho resultou na publicação (MARQUES et al., 2022b). A equivalência entre os

modelos no nível de árvore e quântico é desenvolvido no Capítulo 6. Esta etapa do trabalho resultou no artigo (MARQUES et al., 2022a). Finalmente, no último capítulo apresentamos uma conclusão geral.

2 Equações Relativísticas

Iniciamos este capítulo com alguns conceitos da Relatividade Especial, partindo da simetria de Lorentz e discutindo os *boosts* de Lorentz, o intervalo invariante e o grupo de Lorentz (LEMOS, 2004). Além disso, tratamos de duas equações de campo relativísticas: a equação de Klein-Gordon e a equação de Dirac (MCMAHON, 2008).

2.1 Simetria de Lorentz

De acordo com a Teoria da Relatividade Especial, as leis da física são igualmente válidas em todos os referenciais inerciais (um referencial inercial é aquele onde as leis de newton são válidas). Tal afirmação já estava presente na Física Newtoniana e era manifesta nas transformações de Galileu. Contudo, não se levava em conta como uma lei da natureza o fato de a velocidade da luz ser a mesma em todos os referenciais inerciais, independentemente da velocidade da fonte. Ao ser incorporada como um postulado da Teoria da Relatividade Especial, a invariância da velocidade da luz deu origem a novas relações de simetria, incorporadas nas transformações de Lorentz.

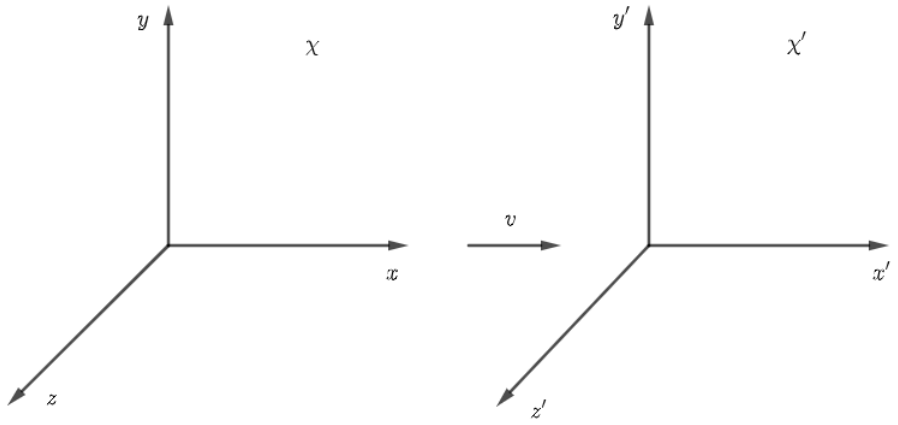
A simetria de Lorentz está na base de toda TQC e está relacionada com as grandezas invariantes no espaço-tempo físico. Tal simetria é implementada pelo grupo das transformações de Lorentz. Nesta seção faremos uma breve discussão sobre a transformação de Lorentz, iniciando com os *boosts* de Lorentz, expondo como se relacionam as coordenadas relativas ao mesmo evento em seus respectivos referenciais. Seguindo, descrevemos o intervalo invariante, destacando que na Teoria Especial da Relatividade, nem a distância espacial nem o intervalo de tempo são separadamente invariantes, mas somente a combinação particular destas grandezas. Por fim, é estudado o grupo de Lorentz, sendo apresentadas as condições genéricas de uma transformação de Lorentz.

2.1.1 *Boosts* de Lorentz

Considere dois referenciais inerciais χ e χ', sendo que χ' movimenta-se em relação a χ com velocidade constante $\boldsymbol{v}$. As origens O de χ e O' de χ' coincidem no instante $t = t' = 0$. Considere também que a velocidade $\boldsymbol{v}$ seja paralela ao eixo x de χ, que coincide com o eixo x' de χ' (veja a Figura 1).

A partir dos postulados da Relatividade Especial, pode-se mostrar que as coordenadas (x,y,z,t) e (x',y',z',t'), relativas ao mesmo evento nos respectivos referenciais χ e χ', se

Figura 1 – Sistemas χ e χ' utilizados na dedução dos *boosts* de Lorentz unidimensionais.



Fonte: Autoria própria.

relacionam da seguinte forma:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \tag{2}$$

$$x' = \gamma\left(x - vt\right), \tag{3}$$

$$y' = y, \tag{4}$$

$$z' = z, \tag{5}$$

com

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{v}{c}. \tag{6}$$

No limite não-relativístico ($c \longrightarrow \infty$), as transformações de Lorentz (2)-(5) equivalem a

$$x' = x - vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t, \tag{7}$$

que correspondem às transformações de Galileu.

No caso (2)-(5), temos a situação em que a velocidade $\boldsymbol{v}$ é paralela à direção do eixo x, no qual podemos representar por

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + (\gamma - 1)x\boldsymbol{i} - \gamma\boldsymbol{v}t, \text{ sendo } \quad \boldsymbol{r} = (x, y, z) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{v} = v\boldsymbol{i}. \tag{8}$$

No entanto, podemos descartar esta restrição em (8) e considerar o caso geral, atribuindo as equivalências

$$vx \longrightarrow \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}, \qquad v\boldsymbol{i} \longrightarrow \boldsymbol{v} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{v}}{c}. \tag{9}$$

Substituindo as equivalências (9) na equação (8), obtemos as transformações, na forma vetorial, independente da direção da velocidade $\boldsymbol{v}$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{r} + (\gamma - 1)x\boldsymbol{i} - \gamma \boldsymbol{v} t, \\ &= \boldsymbol{r} + (\gamma - 1)\frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}}{\beta^2}\boldsymbol{\beta} - \gamma c \boldsymbol{\beta} t \qquad \text{e} \qquad (10) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}}{c}\right). \qquad (11) \end{aligned}$$

Na expressão acima, é importante notar que a componente da posição ortogonal a $\boldsymbol{v}$, dada por

$$\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}}{\beta^2}\boldsymbol{\beta}, \qquad (12)$$

é preservada.

2.1.2 Intervalo Invariante

A Teoria da Relatividade Especial eleva o tempo ao status de coordenada, que deve ser tratada em pé de igualdade com as demais coordenadas em um espaço-tempo quadridimensional. No tradicional espaço tridimensional Euclideano, temos o produto escalar entre dois vetores, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ como um invariante sob transformações de rotação. Tal grandeza não é invariante sob as transformações de Lorentz. Em vez disso, novos invariantes são construídos no espaço-tempo relativístico.

Como primeiro exemplo, mostraremos que o intervalo

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (13)$$

entre dois eventos (x, y, z, t) e $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$, infinitesimalmente próximos, é invariante pelas transformações de Lorentz (2)-(5).

As transformações (2)-(5) na forma infinitesimal são dadas por

$$dx' = \gamma(dx - vdt), \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad dt' = \gamma\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right). \qquad (14)$$

Substituindo estas transformações na expressão (13) correspondente ao diferencial ds'^2, obtemos

$$\begin{aligned} ds'^2 &= c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2, \\ &= c^2\gamma^2\left(dt - \frac{v\,dx}{c^2}\right)^2 - \gamma^2(dx - v\,dt)^2 - dy^2 - dz^2, \\ &= c^2\gamma^2dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \gamma^2dx^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - dy^2 - dz^2, \\ &= ds^2. \qquad (15) \end{aligned}$$

No caso da Teoria Especial da Relatividade, nem a distância espacial nem o intervalo de tempo são separadamente invariantes, mas somente a combinação particular destas grandezas, conforme expressa na equação (13).

No que segue, introduzimos a notação de quadrivetores,

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \tag{16}$$

Assim, um evento no espaço-tempo é indicado pelas coordenadas de um quadrivetor contravariante, escrito como

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3), \tag{17}$$

ao qual corresponde um vetor covariante, dado por

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3). \tag{18}$$

Os vetores contravariante e covariante se relacionam por meio da métrica de Minkowski,

$$\boldsymbol{\eta} = \eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

de forma que podemos abaixar ou levantar índices por meio das relações,

$$x_\alpha = \eta_{\alpha\beta} x^\beta \quad \text{e} \quad x^\alpha = \eta^{\alpha\beta} x_\beta. \tag{20}$$

De agora em diante, como na equação acima, a repetição dos índices indicará a existência de um somatório nesses índices. Ou seja,

$$\eta^{\alpha\beta} x_\beta \equiv \eta^{\alpha 0} x_0 + \eta^{\alpha 1} x_1 + \eta^{\alpha 2} x_2 + \eta^{\alpha 3} x_3. \tag{21}$$

Notemos que, em termos dos componentes do quadrivetor x^μ, as transformações de Lorentz para $\boldsymbol{v}$ na direção do eixo x são dadas por

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma x^0 - \beta\gamma x^1, \\ x'^1 &= -\beta\gamma x^0 + \gamma x^1, \\ x'^2 &= x^2, \\ x'^3 &= x^3. \end{aligned} \tag{22}$$

Na notação de quadrivetores, a transformação de Lorentz $\Lambda^\mu{}_\nu$ será representada por uma transformação linear que pode ser escrita na forma:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_0 x^0 + \Lambda^\mu{}_1 x^1 + \Lambda^\mu{}_2 x^2 + \Lambda^\mu{}_3 x^3 \equiv \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu. \tag{23}$$

Estes coeficientes $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ formam uma matriz, denominada matriz da transformação de Lorentz Λ. No caso particular das transformações (2)-(5), podemos escrever a equação matricial

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \tag{24}$$

em que

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

O quadrivetor tempo-posição é um modelo para todos os quadrivetores. Define-se um quadrivetor a^{μ} como um objeto de quatro componentes que se transforma da mesma maneira que x^{μ} quando passa de um sistema de referências inercial para outro:

$$a'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} a^{\nu}, \tag{26}$$

com os mesmos coeficientes $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$. O intervalo invariante ds^2 é um caso especial do produto escalar no espaço-tempo quadridimensional de Minkowski,

$$\begin{aligned} a \cdot b &= a^{\mu} b_{\mu} = a^0 b_0 + a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3, \\ &= a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a^0 b^0 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}, \end{aligned} \tag{27}$$

que facilmente é demonstrado como invariante.

2.1.3 Grupo de Lorentz

Podemos obter as condições genéricas que uma transformação de Lorentz na forma (23) deve satisfazer, utilizando-se, para isso, a invariância do intervalo ds^2. Escrevemos a equação (13) como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{28}$$

e utilizamos a equação (23) como segue:

$$ds'^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} dx^{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} dx^{\beta}, \tag{29}$$

em que $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor métrico definido na equação (19) para o espaço de Minkowski. Da equação (29), obtemos que a invariância $ds'^2 = ds^2$ equivale à condição

$$\Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}, \tag{30}$$

o que implica

$$\eta_{\alpha\beta} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}. \tag{31}$$

Respeitando os critérios de multiplicação de matrizes (colunas contraídas com linhas), a equação (31) poderá ser reescrita na forma

$$\eta_{\alpha\beta} = (\Lambda^{T})_{\alpha}{}^{\mu}\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}, \tag{32}$$

em que Λ^T é a transposta da matriz Λ. Assim, a relação (32) pode ser escrita na forma matricial,

$$\eta = \Lambda^{T}\eta\Lambda. \tag{33}$$

Portanto, uma transformação de Lorentz Λ é definida pela relação (33). É possível, ainda, a partir da condição acima, obter algumas propriedades da matriz Λ. Primeiramente, calculamos o determinante da equação (33):

$$|\eta| = |\Lambda^{T}\eta\Lambda| = |\Lambda^{T}||\eta||\Lambda|, \tag{34}$$

de onde tiramos que $|\Lambda|^2 = 1$, ou $|\Lambda| = \pm 1$. Para obtermos o resultado acima, utilizamos o fato de que o determinante do produto é igual ao produto dos determinantes. Para o determinante igual a 1, a transformação de Lorentz é conhecida como própria. No caso em que o deteminante é igual a -1, dizemos que a transformação de Lorentz é imprópria.

Façamos, agora, $\alpha = \beta = 0$ na equação (31). Obtemos

$$1 = \eta_{00} = \Lambda^{\mu}{}_{0}\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}{}_{0} = (\Lambda^{0}{}_{0})^2 - (\Lambda^{1}{}_{0})^2 - (\Lambda^{2}{}_{0})^2 - (\Lambda^{3}{}_{0})^2, \tag{35}$$

tal que

$$(\Lambda^{0}{}_{0})^2 = 1 + (\Lambda^{1}{}_{0})^2 + (\Lambda^{2}{}_{0})^2 + (\Lambda^{3}{}_{0})^2 \geq 1. \tag{36}$$

Portanto,

$$|(\Lambda^{0}{}_{0})| \geq 1 \Longrightarrow \Lambda^{0}{}_{0} \geq 1 \text{ ou } \Lambda^{0}{}_{0} \leq -1. \tag{37}$$

No caso em que $\Lambda^{0}{}_{0} \geq 1$, a transformação de Loretnz é conhecida como ortócrona, a qual preserva o sentido do tempo. Se $\Lambda^{0}{}_{0} \leq -1$, a transformação é conhecida como não-ortócrona (ou seja, inverte o sentido do tempo). As transformações próprias e ortócronas são chamadas de transformações de Loretnz restritas. Uma transformação de Lorentz infinitesimal é, necessariamente, restrita. De fato, somente o subconjunto da transformação de Lorentz restrita possui a matriz identidade.

Concluímos que o conjunto das transformações de Lorentz se decompõe em quatro subconjuntos disjuntos, conhecidos como setores do grupo de Lorentz:

Setores do Grupo de Lorentz

$$\begin{array}{lcll} L_+^{\uparrow} & : & |\mathbf{\Lambda}| = +1 & \text{e} \quad \Lambda^0{}_0 \geq +1 \\ L_+^{\downarrow} & : & |\mathbf{\Lambda}| = +1 & \text{e} \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1 \\ L_-^{\uparrow} & : & |\mathbf{\Lambda}| = -1 & \text{e} \quad \Lambda^0{}_0 \geq +1 \\ L_+^{\downarrow} & : & |\mathbf{\Lambda}| = -1 & \text{e} \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1 \end{array}$$

Um subconjunto $L_+^{\uparrow}$ é o único setor que forma um subgrupo do grupo de Lorentz, denominado grupo de Lorentz restrito.

2.2 Equação de Klein–Gordon

A equação de Klein-Gordon é um equação para uma partícula com spin nulo. Ou seja, uma partícula escalar, que possui apenas um componente ϕ. Para obter a equação de onda, partimos da equação de energia relativística. Definimos o quadrivetor momento,

$$p^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z), \tag{38}$$

a partir do qual temos o invariante

$$p_\mu p^\mu = p^2 = m^2c^2 \Longrightarrow \frac{E^2}{c^2} - |\boldsymbol{p}|^2 = m^2c^2, \tag{39}$$

tal que

$$E^2 = |\boldsymbol{p}|^2c^2 + m^2c^4. \tag{40}$$

Reescrevendo a equação (40) com os operadores diferencias E e $\boldsymbol{p}$,

$$E \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad \boldsymbol{p} \longrightarrow -i\hbar\boldsymbol{\nabla}, \tag{41}$$

ficamos com

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\right)\phi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi = 0, \tag{42}$$

que é a equação de Klein-Gordon. Assumindo $\hbar = c = 1$, escrevemos

$$(\Box + m^2)\phi = 0 \tag{43}$$

em que

$$\Box = \partial^\mu\partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2. \tag{44}$$

A interpretação da equação de Klein-Gordon, do ponto de vista de equação de onda relativística para uma partícula, apresentou dificuldades. A fim de entendermos, voltemos à

equação não relativística. Se substituirmos os operadores (41) na aproximação não relativística da equação (40), $E = \frac{p^2}{2m}$, obtemos equação de Schrödinger para uma partícula livre,

$$\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\phi = -i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}. \tag{45}$$

A partir da função de onda ϕ, obtém-se a densidade de probabilidade,

$$\rho = \phi^*\phi, \tag{46}$$

e a densidade de corrente de probabilidade,

$$\boldsymbol{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\phi^*\boldsymbol{\nabla}\phi - \phi\boldsymbol{\nabla}\phi^*), \tag{47}$$

que obedecem à equação de continuidade

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} &= \frac{\partial}{\partial t}(\phi^*\phi) - \frac{i\hbar}{2m}(\phi^*\boldsymbol{\nabla}^2\phi - \phi\boldsymbol{\nabla}^2\phi^*),\\ &= \phi^*\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\phi\right) + \phi\left(\frac{\partial\phi^*}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\phi^*\right),\\ &= 0.\end{aligned} \tag{48}$$

No desenvolvimento acima, a equação de Schrödinger e sua conjugada complexa foram usadas.

Vejamos agora se tal interpretação pode ser adotada para a equação de Klein-Gordon. A construção de uma equação de continuidade para a função de onda de Klein-Gordon, nos leva a uma densidade

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right), \tag{49}$$

que compõe um quadrivetor densidade de corrente,

$$j^\mu = (\rho, \vec{j}) = \frac{i\hbar}{m}\phi^*(\overleftrightarrow{\partial_0}, \overleftrightarrow{\nabla})\phi = \frac{i\hbar}{m}\phi^*\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi, \tag{50}$$

em que

$$A\overleftrightarrow{\partial^\mu}B = \frac{1}{2}[A\partial^\mu B - (\partial^\mu A)B]. \tag{51}$$

A expressão da equação (49) traz dificuldades para a sua interpretação como densidade de probabilidade, pois ρ não é positivamente definida. Isto se deve ao fato de a equação de Klein-Gordon (43) ser de segunda ordem no tempo.

Outra questão com a equação de Klein-Gordon é a solução para a equação (40), interpretada como equação de energia

$$E = \pm\sqrt{m^2c^4 + \boldsymbol{p}^2c^2}, \tag{52}$$

que possui soluções com energias positivas ou negativas. No caso da partícula livre, no qual a energia é constante, esta questão pode ser evitada, escolhendo a partícula com energia positiva. O problema é que uma partícula em interação pode trocar energia com seu ambiente, o que a possibilita entrar para infinitos estados de energia negativa, emitindo uma quantidade infinita de energia no processo.

2.3 Equação de Dirac

Abordaremos agora a equação de Dirac, que se aplica a campos de spin $\frac{1}{2}$, e as representações das matrizes de Dirac com algumas identidades relevantes para o trabalho. Na equação de Schrödinger, as derivadas em relação ao tempo são de primeira ordem, ao passo que as derivadas em relação às coordenadas espaciais são de segunda ordem. Em um modelo relativístico, tempo e coordenadas espaciais devem ser tratados em pé de igualdade. A equação de Klein-Gordon preenche este requisito, sendo de segunda ordem no tempo e no espaço. Contudo, incorre nas dificuldades de interpretação discutidas na última seção.

A equação de Dirac foi desenvolvida a fim de evitar o problema das probabilidades negativas. Para isso, construiu-se uma equação de primeira ordem para as coordenadas espaciais e temporais. Iniciamos pela fatoração da equação da energia relativística,

$$p_\mu p^\mu = m^2c^2 \Longrightarrow p_\mu p^\mu - m^2c^2 = 0 \Longrightarrow (\beta^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\kappa p_\kappa - mc) = 0, \tag{53}$$

em que β^κ e γ^κ são coeficientes. Multiplicando os termos da última equação (53), obtemos

$$\beta^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda + mc(\gamma^\kappa - \beta^\kappa)p_k - m^2c^2 = 0. \tag{54}$$

Comparando com a equação (53), vemos que o termo linear em p_κ deverá ser anulado, de forma que $\gamma^\kappa = \beta^\kappa$. Substituindo este resultado em (54), ficamos com

$$\gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - m^2c^2 = 0. \tag{55}$$

Deixaremos esta equação por um momento para introduzirmos algumas definições e identidades das matrizes de Dirac.

2.3.1 Matrizes de Dirac

As chamadas matrizes γ de Dirac, 4×4, têm como característica o respeito à relação de anticomutação,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}. \tag{56}$$

Existem várias representações possíveis para essas matrizes. Apresentamos a forma explícita das matrizes de Dirac na chamada representação *standard*,

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \qquad \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$
$$\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{57}$$

Há uma abordagem simplificada dessas matrizes de Dirac, na qual utilizamos as matrizes de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{58}$$

Dispondo as matrizes (57) em blocos de matrizes 2×2 e aplicando as matrizes de Pauli (58), ficamos com

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{bmatrix}. \tag{59}$$

Ou seja,

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}. \tag{60}$$

Importante notar que $(\gamma^0)^2 = (\gamma^i)^2 = I$. Defimos também a matriz $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, tal que $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$ e $(\gamma_5)^2 = I$. Essas matrizes serão importantes para desenvolvermos alguns cálculos, portanto evidenciamos abaixo algumas identidades relevantes que podem ser obtidas a partir da relação de anticomutação (56):

1. $\gamma^\mu\gamma_\mu = \gamma^1\gamma_1 + \gamma^2\gamma_2 + \gamma^3\gamma_3 + \gamma^4\gamma_4 = 4I$.
2. $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu$.
3. $\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma_\mu = 4\eta^{\lambda\nu}$.
4. $\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma_\mu = -2\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\lambda$.

2.3.2 Equação de Dirac para uma Partícula Livre

Com as definições e identidades das matrizes de Dirac, podemos prosseguir e avaliar os coeficientes da equação (55). Para que retornemos à equação da energia relativística, o primeiro termo deve se reduzir a

$$\gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda = p^\lambda p_\lambda. \tag{61}$$

Ainda não determinamos a real natureza dos coeficientes γ^κ. Assim, usamos a simetria entre os índices κ e λ para escrever

$$\left(\frac{\gamma^\kappa \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^\kappa}{2}\right) p_\kappa p_\lambda = p^\lambda p_\lambda. \tag{62}$$

Tal relação só pode ser verdadeira se $\gamma^\kappa \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^\kappa = 2\eta^{\kappa\lambda}$. Assim, concluímos que os coeficientes γ^κ são as chamadas matrizes de Dirac introduzidas na última subseção. Examinado a equação (53), escrevemos o quadrivetor $p_\mu = i\hbar\partial_\mu$, em que $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ e aplicamos a operação na função de onda ψ. Obtemos, então, a equação de Dirac para uma partícula livre,

$$(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc)\psi = 0. \tag{63}$$

O próximo passo será determinar a solução da equação de Dirac para uma partícula livre. A função de onda ψ é o chamado espinor de Dirac, que contém 4 componentes. Escrevemos

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \text{em que} \begin{cases} \varphi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \\ \chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \end{cases}. \tag{64}$$

Inicialmente, consideraremos a situação em que ψ é independente da posição, ou seja, $\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0$. Com isso, a equação (63), se transforma em

$$i\frac{\hbar}{c}\gamma^0 \frac{\partial\psi}{\partial t} = mc\psi \tag{65}$$

ou

$$i\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \\ \frac{\partial\chi}{\partial t} \end{pmatrix} = mc^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}. \tag{66}$$

Realizando as operações matriciais, obtemos as soluções;

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = mc^2\varphi \Rightarrow \ \varphi(t) = \varphi(0)e^{\frac{-imc^2 t}{\hbar}}, \tag{67}$$

$$-i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} = mc^2\chi \ \Rightarrow \ \chi(t) = \chi(0)e^{\frac{imc^2 t}{\hbar}}. \tag{68}$$

Analisando as soluções (67) e (68), temos que mc^2 é a energia de repouso da partícula, e que a solução (67) está variando com $e^{\frac{-iEt}{\hbar}}$, enquanto (68) está variando com $e^{\frac{iEt}{\hbar}}$. Devemos tomar cuidado, pois o sinal negativo e o positivo nestas soluções denotam que φ é uma partícula e χ a sua antipartícula, sendo ambas com energias positivas. À parte os fatores de normalização, obtemos

$$\psi_1 = e^{\frac{-imc^2t}{\hbar}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}; \quad \psi_2 = e^{\frac{-imc^2t}{\hbar}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$\psi_3 = e^{\frac{imc^2t}{\hbar}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}; \quad \psi_4 = e^{\frac{imc^2t}{\hbar}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Analisaremos agora o caso em que ψ depende da posição. Supondo uma solução de onda plana, escrevemos

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = ae^{\frac{-i}{\hbar}(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}\, u(E,\boldsymbol{p}). \tag{69}$$

Na notação de quadrivetores, sendo $x^\mu = (ct,x,y,z)$ e $p^\mu = (\frac{E}{c},p_x,p_y,p_z)$, temos

$$p\cdot x = p^\mu x_\mu = p^0x_0 + p^ix_i = p^0x^0 - p^ix_i = \frac{E}{c}\cdot ct - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} = Et - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}, \tag{70}$$

de forma que

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \psi(x) = a\, e^{\frac{-i}{\hbar}x\cdot p}u(p). \tag{71}$$

Substituindo este resultado na equação de Dirac (63), obtemos

$$\left(\gamma^\mu p_\mu - mc\right)u(p)a\, e^{\frac{-ix\cdot p}{\hbar}} = 0, \tag{72}$$

o que resulta na equação de Dirac no espaço dos momentos,

$$\left(\gamma^\mu p_\mu - mc\right)u(p) = 0. \tag{73}$$

Substituindo as matrizes de Dirac na equação de Dirac no espaço dos momentos, ficamos com

$$\gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} = \frac{E}{c}\begin{pmatrix}I & 0\\0 & -I\end{pmatrix} - \boldsymbol{p}\cdot\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\-\boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{E}{c} & -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma} & -\frac{E}{c}\end{pmatrix} \tag{74}$$

e

$$mc\begin{pmatrix}I & 0\\0 & I\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}mc & 0\\0 & mc\end{pmatrix}. \tag{75}$$

Com esses resultados a equação de Dirac (73) toma a forma

$$\begin{pmatrix} \frac{E}{c} - mc & -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma} & -\frac{E}{c} - mc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{76}$$

equivalente ao sistema de equações;

$$\begin{cases} \left(\frac{E}{c} - mc\right) u_1 - (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}) u_2 = 0 \\ \\ (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\, u_1 - \left(\frac{E}{c} + mc\right) u_2 = 0 \end{cases}. \tag{77}$$

Isolando u_2 na segunda equação do sistema, obtemos

$$u_2 = \frac{c}{E + mc^2}\,(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}) u_1 \tag{78}$$

que, substituído na primeira equação do sistema, resulta em

$$u_1 = \frac{c^2}{E^2 - m^2c^4}\,(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2\, u_1. \tag{79}$$

Sendo

$$\sigma_i\sigma_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ i\varepsilon_{ijk}\sigma_\kappa, & i \neq j \end{cases}, \tag{80}$$

podemos escrever $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ij\kappa}\sigma_\kappa$. Desta forma, obtemos o resultado

$$(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = p_i p_j \left[\delta_{ij} + i\varepsilon_{ij\kappa}\sigma_\kappa\right] = |\boldsymbol{p}|^2 + i\varepsilon_{ij\kappa}\, p_i p_j \sigma_\kappa = |\boldsymbol{p}|^2. \tag{81}$$

O termo $i\varepsilon_{ij\kappa}\, p_i p_j \sigma_\kappa$ é anulado porque p_i comuta com p_j. Substituindo este resultado em (79), obtemos

$$u_1 = \frac{|\boldsymbol{p}|^2\, c^2}{E^2 - m^2c^4}\, u_1, \tag{82}$$

comprovando-se consistente com a equação para a energia da partícula livre relatívistica, $E^2 = |\boldsymbol{p}|^2\, c^2 + m^2c^4$.

Voltando à equação (78) e utilizando as matrizes de Pauli, escrevemos

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma} = p_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + p_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + p_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}. \tag{83}$$

Com isso,

$$u_2 = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} u_1. \tag{84}$$

Caso isolarmos u_1 na primeira equação do sistema (78) e substituirmos o resultado (83), ficamos com

$$u_1 = \frac{c}{E - mc^2} (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) u_2 = \frac{c}{E - mc^2} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} u_2. \tag{85}$$

Diante das relações determinadas entre os espinores de duas componentes, teremos quatro situações

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}, \tag{86}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}, \tag{87}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \frac{c}{E - mc^2} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}, \tag{88}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \frac{c}{E - mc^2} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}. \tag{89}$$

A equação da energia relativística nos fornece duas soluções:

$$E = \pm\sqrt{m^2c^4 + |\boldsymbol{p}|^2 c^2}. \tag{90}$$

Analisando as equações, temos que as duas primeiras exigem $E > 0$, pois, em caso de $|\boldsymbol{p}|^2 = 0$, teremos $E = \pm\, m^2c^2$, de forma que a solução negativa nos levaria a um denominador nulo. Estas são soluções de partículas com spin $\pm\frac{1}{2}$. As duas últimas equações, por outro lado, exigem $E < 0$, pelo mesmo motivo, correspondendo a soluções de antipartículas com spin $\pm\frac{1}{2}$.

3 Simetrias na Eletrodinâmica Quântica

As simetrias desempenham um papel fundamental na formulação de teorias físicas. Um objeto ou teoria possui uma ou mais simetrias se houver transformações que deixem invariantes certas características dos objetos ou da teoria à qual as transformações de simetrias são aplicadas (BERGHOFER et al., 2021).

Um exemplo notável é a Teoria da Relatividade, que estabelece quais são as simetrias do espaço-tempo. Em particular na TQC, um outro tipo de simetria importante são as simetrias internas, mais especificamente as simetrias de calibre. Esses dois tipos de simetria, do espaço-tempo e de calibre, formam a base teórica do MP da física de partículas elementares.

Neste capítulo, tratamos das simetrias na eletrodinâmica, mais especificamente a simetria de calibre. Inicialmente, apresentamos as equações de Maxwell em sua formulação covariante. Discutimos também a eletrodinâmica de Proca, na qual é introduzida uma massa para o fóton. Por fim, tratamos da simetria de calibre e apresentamos modelos com violação da simetria de Lorentz.

3.1 As Equações de Maxwell no Formalismo Covariante

Nesta seção, partimos das conhecidas equações de Maxwell em sua representação diferencial e determinamos a sua forma covariante de Lorentz. Esta seção foi baseada em (RYDER, 1996).

Iniciamos com as as equações de Maxwell em sua representação diferencial,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{91}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0, \tag{92}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \rho, \tag{93}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{j}. \tag{94}$$

A primeira equação (91) é a lei de Gauss para o magnetismo e reflete a ausência de carga magnética. A equação de Faraday-Lenz (92) indica que a variação no tempo do campo magnético $\boldsymbol{B}$ induz um campo elétrico $\boldsymbol{E}$. A terceira equação (93) é a lei de Gauss para o campo elétrico $\boldsymbol{E}$ e, finalmente, a equação de Ampère-Maxwell (94) nos diz que a variação temporal do campo elétrico $\boldsymbol{E}$ ou a existência de correntes que induz um campo magnético $\boldsymbol{B}$. Importante notar que estamos adotando o sistema de unidades em que $c = \hbar = 1$.

A fim de obter a representação covariante para as equações de Maxwell, definimos o quadrivetor potencial,

$$A^{\mu} = (\phi, \boldsymbol{A}), \tag{95}$$

tal que suas componentes obedecem às equações

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\phi. \tag{96}$$

A partir do quadrivetor A^μ, definimos o tensor intensidade de campo,

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \tag{97}$$

cujas componentes podem ser obtidas das relações (96):

$$\begin{aligned} F^{0i} &= \partial^0 A^i - \partial^i A^0, \\ &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\phi\right)_i, \\ &= -E^i, \end{aligned} \tag{98}$$

e

$$\begin{aligned} F^{ij} &= \partial^i A^j - \partial^j A^i, \\ &= -\varepsilon^{ijk} B^k, \end{aligned} \tag{99}$$

em que fizemos uso do tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita, $\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk}$, que é tal que $\varepsilon^{123} = 1$. Assim, podemos escrever o tensor intensidade de campo na forma matricial:

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{100}$$

O tensor intensidade de campo é antissimétrico e de segunda ordem, de forma que sob transformação de Lorentz obtemos

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}. \tag{101}$$

Considerando o tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita no espaço-tempo quadridimensional (espaço de Minkowski), $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$, tal que $\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = 1$, definimos o tensor eletromagnético dual, também antissimétrico,

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \tag{102}$$

cuja representação matricial é dada por

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{103}$$

Verificamos que

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\mu\partial_\rho A_\sigma - \partial_\mu\partial_\sigma A_\rho) = 0, \tag{104}$$

devido à antissimetria do tensor de Levi-Civita. As duas equações de Maxwell homogêneas, lei de Gauss para o magnetismo (91) e lei de Faraday-Lenz (92), são obtidas desta equação (104) quando se fixam $\nu = 0$ e $\nu = i$ (i um índice espacial), respectivamente.

A fim de obtermos as outras duas equações, definimos o quadrivetor densidade de corrente,

$$j^\nu = (\rho, \boldsymbol{j}). \tag{105}$$

Construímos, então, a equação

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \tag{106}$$

que nos fornece a lei de Gauss (93), para $\nu = 0$, e de Ampère-Maxwell (94), para $\nu = i$ (i um índice espacial). Assumindo $\nu = 0$, temos

$$\begin{aligned} \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} &= \rho, \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} &= \rho. \end{aligned} \tag{107}$$

Para o caso em que ν é um índice espacial, vejamos $\nu = 1$. Teremos,

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &= j^1, \\ -\frac{\partial E^1}{\partial t} + \frac{\partial B^3}{\partial x_2} - \frac{\partial B^2}{\partial x_3} &= j^1, \end{aligned} \tag{108}$$

resultado na primeira componente da equação de Ampère-Maxwell (94). Assim, as quatro equações de Maxwell se reduzem, no formalismo covariante, a duas equações simples:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \text{e} \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{109}$$

3.2 Equações de Campo para o Quadrivetor Potencial

Nesta seção, utilizamos as equações de Maxwell no formalismo covariante (109) e a definição do tensor intensidade de campo (97) para obter equações de campo para o quadrivetor potencial, que é o campo mais fundamental e que descreve o fóton. É conhecido que diante das transformações

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}\chi, \qquad \phi \longrightarrow \phi + \frac{\partial\chi}{\partial t}, \tag{110}$$

os campos elétrico e magnético ficam invariantes. Tais transformações podem ser reunidas na forma covariante,

$$A^\mu \longrightarrow A^\mu + \partial^\mu\chi, \tag{111}$$

em que χ representa uma função escalar arbitrária. Para tal transformação na versão covariante, o tensor eletromagnético intensidade de campo fica inalterado:

$$F^{\mu\nu} \longrightarrow F^{\mu\nu} + (\partial^\mu\partial^\nu - \partial^\nu\partial^\mu)\chi = F^{\mu\nu}. \tag{112}$$

Com o intuito de obter a equação de campo para o potencial, usamos a definição do tensor $F^{\mu\nu}$ nas equações de Maxwell não homogêneas (109). Obtemos

$$\Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\nu, \tag{113}$$

em que $\Box = \partial_\mu\partial^\mu$. Como vimos, o campo potencial A^μ possui uma liberdade de definição que depende da função escalar $\chi(x)$. Tal função pode ser escolhida de forma que

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \tag{114}$$

que define o chamado calibre de Lorentz. Neste caso, a equação (113) se reduz a

$$\Box A^\mu = j^\mu, \tag{115}$$

que, na ausência de matéria, nos fornece

$$\Box A^\mu = 0. \tag{116}$$

Vemos, então, que o campo que representa o fóton respeita uma equação de Klein-Gordon para uma partícula não massiva (43). Nas próximas seções, trataremos mais a fundo a questão da simetria de calibre e de como ela se relaciona com o fato de um campo vetorial ter ou não massa.

Uma versão massiva das equações de Maxwell é expressa pelo modelo de Proca, para o qual, na ausência de matéria, temos a equação

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \tag{117}$$

Se calcularmos a quadridivergência da equação acima, obtemos

$$m^2\partial_\nu A^\nu = 0, \tag{118}$$

o que, para $m^2 \neq 0$, nos exige $\partial_\nu A^\nu = 0$. Assim, a condição de Lorentz é obrigatória para a eletrodinâmica de Proca, havendo a perda da liberdade de ajuste da função escalar $\chi(x)$. Usando a condição de Lorentz na equação (117), obtemos

$$(\Box + m^2)A^\mu = 0, \tag{119}$$

que significa que cada componente do campo A^μ obedece à equação de Klein-Gordon (43).

3.3 Simetria de Calibre

A simetria de calibre exerce um papel fundamental no MP que descreve as interações eletrofraca e forte entre as partículas elementares. Sua aplicação à Mecânica Quântica remonta ao trabalho de Vladimir Fock em 1926 (JACKSON; OKUN, 2001).

Conforme já discutido no Capítulo 1, as simetrias ou invariâncias são de vital importância na Física. O teorema de Noether enuncia que as simetrias contínuas estão sempre relacionadas à conservação de uma grandeza física. Assim, a homogeneidade do espaço resulta em uma invariância por translação que, por sua vez, implica na conservação do momento linear; da homogeneidade do tempo, ou seja, da invariância com respeito às translações temporais, chega-se à conservação da energia; a conservação do momento angular é consequência da invariância por rotações (GREINER; MÜLLER, 1993).

Uma importante classificação das simetrias corresponde à sua natureza local ou global. As simetrias globais são transformações que são realizadas de forma idêntica em cada ponto do espaço-tempo. No caso das simetrias locais, as transformações dependem do ponto do espaço-tempo em que são aplicadas. Uma transfomação de calibre global em um campo $\psi(x)$ é definida por

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\theta}\psi(x), \tag{120}$$

em que θ é independente das coordenadas x do espaço-tempo. Quando a fase θ depende das coordenadas x ($\theta = \theta(x)$), diz-se que a transformação de calibre é local. Uma transformação (global ou local) do tipo (120) corresponde a uma transformação pelo grupo de simetria $U(1)$, o conjunto das transformações unitárias $U = e^{i\theta}$ com $\theta \in \mathbb{R}$.

3.3.1 Simetria de Calibre Local na Eletrodinâmica

A interação de partículas carregadas com o campo eletromagnético impõe o princípio de que as equações da teoria são invariantes por transformação de calibre local. No que segue, iremos exemplificar esta questão no contexto de partículas relativísticas de spin $\frac{1}{2}$, descritas pela equação de Dirac:

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0, \tag{121}$$

em que m corresponde à massa da partícula.

Para que a equação de Dirac seja invariante pela transformação de calibre local,

$$\psi \longrightarrow e^{i\theta(x)}\psi, \tag{122}$$

devemos utilizar o princípio de que a derivada ∂_μ deve ser substituída pela derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \tag{123}$$

sendo e um parâmetro adimensional que desempenha o papel de constante de acoplamento entre o campo eletromagnético e a matéria fermiônica, campo A_μ deve transformar-se como

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \theta(x). \tag{124}$$

O campo $A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$ é denominado quadrivetor potencial e $\theta(x)$ é uma função real que implementa a transformação de calibre. Desse modo, para assegurar a invariância de calibre local, a equação de Dirac (121) deve ser modificada para

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi - \gamma^\mu e A_\mu \psi = 0, \tag{125}$$

em que a equação (123) foi substituída na equação (121). Portanto, a simetria de calibre local introduz o termo de interação do campo ψ com o campo A_μ, que neste caso, corresponde ao potencial vetor do campo eletromagnético da teoria de Maxwell.

Na Fisíca de partículas, o aspecto importante do princípio de invariância de calibre local é introduzir a interação do campo eletromagnético com a partícula relativística (léptons) de acordo com a equação (125). Neste contexto, emprega-se a linguagem da Teoria de Campos, em que a densidade Lagrangeana descrevendo a interação do campo eletromagnético com o campo de spin $\frac{1}{2}$ é dada por

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{126}$$

Nesta expressão, o primeiro termo corrresponde ao campo de Dirac interagindo com o campo eletromagnético, descrito pelo tensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

A Lagrangeana (126) descreve a QED. Ela pode ser aberta e escrita explicitamente como

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) - e\overline{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu \psi(x) \tag{127}$$

em que o último termo define a interação dos campos via a constante de acoplamento e, relacionada com a carga elétrica da partícula. Utilizando a transformação de calibre local (122) do campo de Dirac, juntamente com a transformação (123) do campo A_μ, mostra-se que a densidade Lagrangeana (127) é invariante por uma transformação de calibre local.

Finalizamos com dois comentários acerca da TQC. Primeiramente, para uma quantização covariante, deve-se adicinonar à Lagrangeana (127) um termo de fixação de calibre, que em geral, pode ser escolhido como

$$-\frac{\xi}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2, \tag{128}$$

em que ξ é o parâmetro de fixação de calibre, que é um número real arbitrário. Em segundo lugar, os observáveis físicos não devem depender da escolha de ξ. Este é um resultado importante que pode ser provado na TQC que descreve o MP da Física de partículas elementares (LEE; ZINN-JUSTIN, 1973).

3.3.2 Prova da Invariânvia de Calibre na Teoria Clássica

A seguir, mostraremos explicitamente a invariância de calibre da densidade Lagrangeana (127). Isso será feito para a transformação global (120) e para transformação local (122).

A prova da invariância de calibre envolverá três termos: a Lagrangeana para o campo eletromagnético,

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{129}$$

a Lagrangeana de Dirac,

$$\mathcal{L}_{Dirac} = i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\overline{\psi}\psi, \tag{130}$$

e o termo de interação que acopla o campo de Dirac e o campo eletromagnético,

$$\mathcal{L}_{Int} = -e\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}. \tag{131}$$

As três partes acima compõem a Lagrangeana da QED dada em (127). Nos referimos à Teoria Clássica, porque não consideramos as correções de ordem superior na constante de acoplamento, as chamadas correções quânticas devidas aos *loops*. A demonstração seguinte está baseada na referência (MCMAHON, 2008).

A invariância de calibre global das contribuições expressas pelas equações (130) e (131) é obtida diretamente, uma vez que θ é uma constante real e, portanto $\partial_{\mu}e^{i\theta} = 0$. Para o termo de massa, por exemplo, temos

$$m\overline{\psi}\psi \longrightarrow m[e^{-i\theta}\overline{\psi}(x)][e^{i\theta}\psi(x)] = m\overline{\psi}\psi. \tag{132}$$

Para a física de partículas, é importante verificar a invariância da soma das contribuições (129), (130) e (131) sob uma transformação de calibre local. Neste caso, iremos adotar o parâmetro $\theta = \theta(x)$, dependente das coordenadas $x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ do espaço-tempo. Considerando o termo de massa contido na equação (130), a invariância de calibre local segue o mesmo padrão da obtida em (132). A diferença fundamental ocorre no termo contendo a derivada, já que agora $\partial_{\mu}e^{i\theta(x)} \neq 0$. Aplicando a transformção local no primeiro termo da equação (130), obtemos

$$\begin{aligned} i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi &\longrightarrow i[e^{-i\theta(x)}\overline{\psi}(x)]\gamma^{\mu}\partial_{\mu}[e^{i\theta(x)}\psi(x)], \\ &= i\overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) - \overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)\partial_{\mu}\theta, \\ &\neq i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi. \end{aligned} \tag{133}$$

O cálculo acima mostra que a Lagrangeana de Dirac com apenas a derivada simples (em contrapartida à covariante) não é invariante sob uma transformação de calibre local. Contudo, se exigirmos que o campo eletromagnético transforme-se como

$$A_{\mu} \longrightarrow A_{\mu} - \frac{1}{e}\partial_{\mu}\theta, \tag{134}$$

com a consequente transformação do termo de interação (131) dada por

$$\mathcal{L}_{Int} \longrightarrow -e\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi\left(A_{\mu} - \frac{1}{e}\partial_{\mu}\theta\right) = -e\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu} + \overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi\partial_{\mu}\theta, \tag{135}$$

obteremos exatamente o termo necessário para cancelar a parte extra que aparece em (133). Diante dos resultados (132), (133) e (135), temos a Lagrangeana $\mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Int}$ invariante:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Int} &\longrightarrow i\overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) - \overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)\partial_{\mu}\theta \\
&+ m\overline{\psi}(x)\psi(x) - e\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu} + \overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)\partial_{\mu}\theta, \\
&= i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\overline{\psi}\psi - e\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}, \\
&= \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Int}.
\end{aligned} \tag{136}$$

Notemos que o termo de interação faz exatamente o papel do complemento para a derivada covariante. A prescrição $\partial_{\mu} \longrightarrow D_{\mu}$ dá origem ao chamado acoplamento mínimo do campo ψ com o campo A_{μ}.

Para finalizar, devemos mostrar a invariância da Lagrangeana (129) pela transformação (134). Temos, para o tensor eletromagnético,

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &\rightarrow \partial_{\mu}\left(A_{\nu} - \frac{1}{e}\partial_{\nu}\theta\right) - \partial_{\nu}\left(A_{\mu} - \frac{1}{e}\partial_{\mu}\theta\right), \\
&= \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu},
\end{aligned} \tag{137}$$

o que garante a invariância da parte referente apenas ao campo eletromagnético. Uma outra forma de mostrar tal invariância em $F_{\mu\nu}$ seria pela substituição da derivada simples pelo derivada covariante, $F'_{\mu\nu} = D_{\mu}A_{\nu} - D_{\nu}A_{\mu} = F_{\mu\nu}$.

3.4 Eletrodinâmica Massiva

Um dos maiores triunfos da ciência do século XIX foi a formulação, por Maxwell, de uma descrição matemática unificada da Eletrodinâmica Clássica. Uma consequência direta do eletromagnetismo de Maxwell é o fato de a velocidade de propagação de qualquer radiação eletromagnética ser constante no vácuo, independentemente do referencial inercial adotado. Experimentos em uma grande faixa de frequências confirmam com alto grau de precisão este resultado. A constância da velocidade da luz implica, por sua vez, o quantum de radiação, o fóton, ter massa nula. Contudo, o fóton apresenta energia $h\nu$, momento linear $\frac{h\nu}{c}$ e spin 1. Embora o enorme sucesso da QED tenha levado à quase total aceitação do fóton não massivo, há um esforço experimental para se determinar, direta ou indiretamente, se a massa do fóton é zero. Como veremos adiante, uma massa de repouso não nula para o fóton, do ponto de vista teórico, é perfeitamente compatível com os princípios gerais da Física de partículas elementares.

Considera-se impossível formular um experimento a partir do qual se demonstre que a massa do fóton é exatamente zero. Na verdade, o melhor que se pode fazer é restringir cada vez

mais o limite superior para a magnitude de uma eventual massa. De acordo com o princípio da incerteza, o melhor que se poderia obter para o limite superior da massa do fóton seria $m_\gamma \sim \frac{\hbar}{(\Delta t)c^2}$, o que daria algo da ordem de 10^{-69} kg, para uma idade do universo de 10^{10} anos. Mesmo com uma massa de magnitude tão ínfima e extremamente difícil de detectar, as consequências de uma massa não nula para o fóton seriam importantes. Por exemplo, teríamos uma velocidade da luz no vácuo dependente do comprimento de onda, haveria desvios da lei de Coulomb e ondas eletromagnéticas longitudinais.

A quebra da invariância de calibre pode causar problemas indesejáveis no modelo, como a violação da unitariedade, com efeitos deletérios na renormalizabilidade da teoria. Para o habitual modelo de Proca, uma solução foi encontrada por (STUECKELBERG, E.C.G., 1938), em que um termo misto que inclui um campo escalar é adicionado à densidade Lagrangeana, de modo que a simetria de calibre seja restaurada. Acontece que o modelo de Proca pode ser obtido por meio da fixação do calibre da Lagrangeana de Stueckelberg. Outra possibilidade é a aplicação do conceito de teorias duais, usando, por exemplo, o procedimento de dualização de Noether (FARGNOLI et al., 2014). Considera-se o modelo não invariante como a versão de calibre fixado de uma teoria de calibre. Simetrias ocultas podem ser reveladas pela construção de uma teoria invariante de calibre a partir de uma não invariante.

Além da discussão realizada acima, é importante notar que há situações em que o fóton se comporta como se tivesse uma massa efetiva, como nos casos em que a luz interage com o plasma carregado ou se propaga ao longo de um guia de onda. Assim, o estudo da eletrodinâmica massiva apresenta diversas aplicações. Nos capítulos que seguem, faremos estudos de consistência física de alguns modelos com termos de massa não usuais. A fim de completar a compreensão da motivação desses modelos, faremos, a seguir, uma breve introdução às teorias com violação da simetria de Lorentz.

3.5 Modelos com Violação da Simetria de Lorentz

As simetrias de Lorentz e CPT desempenham um papel fundamental na TQC e são observadas com alta precisão em todos os testes experimentais (KOSTELECKÝ; RUSSELL; TSO, 2012). A simetria de Lorentz caracteriza todas as teorias relativísticas, que são invariantes sob as transformações de Lorentz. A invariância sob uma combinação das transformações discretas de conjugação de carga, de paridade e de inversão temporal, simetria CPT, é vinculada, por meio do teorema CPT, à invariância de Lorentz, já que todas as teorias que respeitam esta simetria obrigatoriamente são invariantes sob transformações CPT.

Entretanto, o interesse em modelos que violam as simetrias de Lorentz e CPT vem crescendo desde que um termo do tipo Chern-Simons em um espaço-tempo de quatro dimensões foi considerado pela primeira vez (CARROLL; FIELD; JACKIW, 1990). O MPE (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1997; COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1998), que inclui o termo tipo Chern-Simons (também conhecido como termo de Carroll-Field-Jackiw), proporciona uma descrição

das violações de Lorentz e CPT, controladas por um conjunto de coeficientes, cujas pequenas magnitudes devem ser garantidas pelos experimentos. Tais violações viriam de uma teoria mais fundamental e os coeficientes que as caracterizam seriam valores esperados no vácuo de quantidades tensoriais da teoria subjacente. Muitos aspectos do MPE têm sido estudados desde então (PEREZ-VICTORIA, 2001; SCARPELLI et al., 2001; ALTSCHUL, 2007; CASANA et al., 2010).

A Eletrodinâmica Quântica Tradicional (MARIZ; NASCIMENTO; PETROV, 2022), como a Teoria de Campos de maior sucesso, é um modelo invariante sob transformações de Lorentz e de calibre. Modelos de eletrodinâmica massiva violam, em uma primeira análise, a simetria de calibre. O termo de massa de Proca, embora quebre a invariância de calibre, respeita a simetria de Lorentz. É possível, contudo, elaborar modelos com termos de massa que, em princípio, violem ao mesmo tempo essas duas simetrias.

Modelos com a presença de termos de massa que violam a simetria de Lorentz foram investigados antes e apresentam interessantes peculiaridades. Algumas dessas particularidades foram apontadas nas referências (GABADADZE; GRISA, 2005) e (DVALI; PAPUCCI; SCHWARTZ, 2005), em que um termo de massa do tipo $-\frac{1}{2}m^2 A^j A^j$ foi considerado, sendo j um índice espacial. O campo de calibre, neste caso, tem dois graus de liberdade massivos, mas a força estática entre as partículas carregadas é do tipo Coulomb. Em (ALTSCHUL, 2006), foi investigada a possibilidade de se gerar radiativamente uma massa para o fóton em segunda ordem no vetor de quebra de Lorentz. Também foi realizada uma análise de termos de massa mais gerais, e a possibilidade de existência de modos superluminais em tais casos foi mostrada. Uma Lagrangeana de Stueckelberg para fótons massivos em um calibre R_ξ generalizado foi estudado no trabalho (CAMBIASO; LEHNERT; POTTING, 2012). Termos de massa que quebram a simetria de Lorentz gerados por quebra espontânea de simetria de calibre em um modelo de calibre-Higgs violador de Lorentz foram investigados na referência (ALTSCHUL, 2012). Em (FARGNOLI et al., 2014), alguns aspectos deste tipo de quebra de simetria de calibre foram focados em um estudo de modelos duais.

Nos capítulos que seguem serão examinados modelos que apresentam termos de massa que violam a simetria de Lorentz e, em uma primeira análise, a invariância de calibre. Veremos que, mesmo em tais situações, é possível recuperar características essenciais para um modelo fisicamente consistente.

4 Dualização

O conceito de dualidade é muito útil no estudo de modelos teóricos em diversas áreas da Física, que abrangem da matéria condensada às TQC (POLCHINSKI, 2017), (HJELMELAND; LINDSTRöM, 1997).

Isso porque alguns modelos apresentam características ocultas que são evidentes no seu dual. Sendo os modelos duais aqueles diferentes na forma, mas equivalentes na descrição de um sistema físico, pode-se dizer que eles são complementares: se um é mais adequado em determinado regime, em outra situação limite, o outro modelo se mostra mais efetivo. Torna-se, então, uma questão interessante saber se um determinado modelo posssui um dual com as características desejadas. Além disso, relações de dualidade permitem o mapeamento de uma teoria com acoplamento fraco em outra com acoplamento forte, em função da implementação da relação entre acoplamentos elétrico e magnético.

A primeira relação estabelecida neste contexto foi a paradigmática dualidade entre o modelo autodual e o de Maxwell-Chern-Simons, no espaço-tempo tridimensional (DESER; JACKIW, 1984) e foi discutida como uma característica genérica de uma ampla classe de modelos de Teoria de Campos. Desde então, diferentes métodos para estabelecer e estudar as relações de dualidade foram elaborados (HJELMELAND; LINDSTRöM, 1997).

Neste capítulo, em um contexto geral, apresentaremos alguns exemplos de dualidade, como a da relação entre campos escalares e tensoriais e a dualidade entre a eletricidade e o magnetismo (HJELMELAND; LINDSTRöM, 1997). Por fim, apresentamos o MDN, o qual terá grande relevância para o desenvolvimento deste trabalho.

4.1 Escalar x Tensor

Nesta seção, apresentaremos um exemplo de dualidade entre modelos que envolvem campos escalares e tensoriais. Mostraremos que as ações apresentadas são diferentes na forma, mas equivalentes na descrisão de um sistema físico. Ou seja, mostraremos que se tratam de modelos duais. Consideremos as duas ações abaixo:

I) para o campo livre de Klein-Gordon, ϕ, sem massa, em um espaço-tempo quadridimensional,

$$S_\phi = \frac{1}{2}\int d^4x[F_\mu(\phi)F^\mu(\phi)], \quad \text{em que} \quad F_\mu = \partial_\mu\phi, \tag{138}$$

II) e para um campo tensorial de segunda ordem antissimétrico, $A_{\mu\nu}$, também sem massa, em quatro dimensões espaço-temporais,

$$S_A = \frac{1}{3!}\int d^4x[F_{\mu\nu\rho}(A)F^{\mu\nu\rho}(A)], \quad \text{em que} \quad F_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu A_{\nu\rho} - \partial_\nu A_{\mu\rho} + \partial_\rho A_{\mu\nu}. \tag{139}$$

A partir das equações de Euler-Lagrange e da definição dos campos duais,

$$\tilde{F}^{\mu\nu\rho}(\phi) = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_\sigma(\phi), \tag{140}$$

$$\tilde{F}^{\sigma}(A) = \frac{1}{3!}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu\rho}(A), \tag{141}$$

podemos obter as equações de campo e as identidades de Bianchi. Para o campo livre de Klein-Gordon, obtemos

$$\partial_\mu F^\mu(\phi) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{equação de campo,}$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu\rho}(\phi) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{identidade de Bianchi,}$$

e para o campo tensorial antissimétrico livre:

$$\partial_\mu \tilde{F}^\mu(A) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{identidade de Bianchi,}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu\rho}(A) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{equação de campo.}$$

Convém observar que as identidades de Bianchi provêm da definição dos tensores duais.

Como podemos observar, a alteração de uma descrição para a outra faz a troca do papel das equações de campo e das identidades de Bianchi. A fim de se fazer uma análise mais detalhada da relação entre os dois modelos, cria-se uma ação mestre $S_{F,\phi}$ que gere as duas ações por meio da substituição das equações de campo na Lagrangeana original. Consideremos a ação,

$$S_{F,\phi} = \int d^4x (a F_{\mu\nu\rho} F^{\mu\nu\rho} + b\phi\partial_\mu \tilde{F}^\mu). \tag{142}$$

em que ϕ é um campo escalar multiplicador de Lagrange e $F_{\mu\nu\rho}$ é um campo independente, sem nenhuma relação a priori com o campo A.

Aplicando-se o princípio da ação mínima à ação $S_{F,\phi}$ em relação à variação do campo ϕ, $\delta\phi$, obtemos

$$\partial_\mu \tilde{F}^\mu = \frac{1}{3!}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu F_{\nu\rho\sigma} = 0 \tag{143}$$

Desta forma, o campo $F_{\nu\rho\sigma}$ é forçado a satisfazer a identidade de Bianchi, e podemos escrever $F_{\nu\rho\sigma} = \partial_\nu A_{\rho\sigma} - \partial_\rho A_{\nu\sigma} + \partial_\sigma A_{\nu\rho}$. Substituindo este resultado na ação mestre da equação (142), fazendo $a = \frac{1}{3!}$, obtemos a ação para o campo tensorial livre (139).

Para finalizar, falta obter a equação para o campo ϕ a partir da equação (142). Fazendo $a = \frac{1}{3!}$, escrevemos a ação mestre como

$$S_{F,\phi} = \frac{1}{3!}\int d^4x (F_{\mu\nu\rho} F^{\mu\nu\rho} + b\phi\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu F_{\nu\rho\sigma}). \tag{144}$$

Então, aplicamos o princípio da ação mínima, em relação à variação do campo tensorial $F_{\mu\nu\rho}$, $\delta F_{\mu\nu\rho}$, obtendo a relação

$$F^{\mu\nu\rho} = -\frac{b}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\kappa}\partial_\kappa\phi, \tag{145}$$

que, substituída em $S_{F,\phi}$, nos fornece

$$\begin{aligned} S_{F,\phi} &\longrightarrow \frac{1}{3!}\int d^4x\left(\frac{b^2}{4}\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\varepsilon_{\kappa\mu\nu\rho}\partial_\lambda\phi\partial^\kappa\phi + \frac{b^2}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\kappa\nu\rho\sigma}\phi\partial_\mu\partial^\kappa\phi\right), \\ &= \frac{1}{3!}\int d^4x\left(\frac{b^2}{4}(-3!)\delta^\lambda{}_\kappa\partial_\lambda\phi\partial^\kappa\phi - \frac{b^2}{2}(-3!)\delta^\mu{}_\kappa\partial_\mu\phi\partial^\kappa\phi\right), \\ &= \frac{b^2}{4}\int d^4x(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi). \end{aligned} \tag{146}$$

Para $b = \sqrt{2}$, recupera-se a ação para o campo escalar livre, para o caso de dualiadade em 4 dimensões consultar (GUIMARAES et al., 2011). Assim, a partir da ação mestre $S_{F,\phi}$, obtemos S_ϕ e S_A, que representam, pelo menos classicamente, modelos equivalentes ou, em outras palavras, modelos duais.

4.2 Dualidade Eletricidade x Magnetismo

Nesta seção, apresentamos mais um exemplo de dualidade. Partimos das equações de Maxwell sem fontes e mostramos uma dualidade eletromagnética.

Conforme vimos no Capítulo 3, no formalismo covariante as equações de Maxwell reduzem-se a duas equações tensoriais,

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{e} \qquad \partial_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0, \tag{147}$$

sendo a segunda delas a identidade de Bianchi. Vemos uma simetria na troca da equação de campo pela identidade de Bianchi, ou simplesmente as permutas

$$F^{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{F}^{\mu\nu} \qquad \text{e} \qquad \tilde{F}^{\mu\nu} \longrightarrow -F^{\mu\nu}, \tag{148}$$

em que

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{bmatrix}, \tag{149}$$

o que resulta em uma simetria discreta pelas trocas

$$\boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{B} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{B} \longrightarrow -\boldsymbol{E}. \tag{150}$$

Trata-se de uma dualidade eletromagnética.

Como fizemos na Seção 4.1, construímos uma ação mestre. Considerando a ação

$$S_A = \frac{1}{4g^2}\int d^4x F_{\mu\nu}(A)F^{\mu\nu}(A) \tag{151}$$

em que g é a constante de acoplamento, com $F_{\mu\nu}(A) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e a identidade Bianchi, $\partial_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0$, tentamos uma ação mestre na forma

$$S_{F,\Lambda} = \int d^4x \left(\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + a\Lambda_\mu \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} \right), \tag{152}$$

em que Λ_μ é um campo vetorial e na qual, em princípio, $F_{\mu\nu}$ é um campo independente. Variando a ação em relação a Λ_μ, obtemos

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \Longrightarrow F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{153}$$

de forma que tal substituição em $S_{F,\Lambda}$ nos leva a S_A (151).

Pretendemos agora obter uma ação dual a S_A (151). Aplicamos o princípio da ação mínima, desta vez por meio da variação do campo $F_{\mu\nu}$, $\delta F_{\mu\nu}$, obtendo

$$\frac{1}{2g^2} F^{\mu\nu} = \frac{a}{2} \partial_\rho \Lambda_\sigma \varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu} \equiv \frac{a}{2} \tilde{G}^{\mu\nu}, \tag{154}$$

em que $\tilde{G}^{\mu\nu}$ é o tensor dual de $G^{\mu\nu} = \partial^\mu \Lambda^\nu - \partial^\nu \Lambda^\mu$.

Subtituindo este resultado em (151), obtemos a ação para o campo vetorial Λ^μ,

$$S_{F,\Lambda} \longrightarrow S_\Lambda = -\frac{g^2 a^2}{4} \int d^4x \; \tilde{G}_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu}. \tag{155}$$

Para escrevermos a ação em termos do tensor $G^{\mu\nu}$, usamos

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} G^{\rho\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} G_{\alpha\beta}, \\ &= -2(\delta^\alpha_\rho \delta^\beta_\sigma - \delta^\alpha_\sigma \delta^\beta_\rho) G^{\rho\sigma} G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(G^{\alpha\beta} - G^{\beta\alpha}) G_{\alpha\beta}, \\ &= -G^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{156}$$

de forma que, para $a = 1$, obtém-se a ação dual de (151),

$$S_\Lambda = \frac{g^2}{4} \int d^4x \; G_{\mu\nu}(\Lambda) G^{\mu\nu}(\Lambda). \tag{157}$$

Nota-se que, no processo de dualização, mudou-se o regime de acoplamento: $g \to g' = \frac{1}{g}$. A relação obtida por meio do princípio da ação mínima, $\frac{1}{g^2} F^{\mu\nu} = \tilde{G}^{\mu\nu}$ explicita a troca entre campos elétrico e magnético no procedimento de dualização. A dualidade eletricidade-magnetismo é do tipo vetor-vetor.

4.3 Método Iterativo de Dualização de Noether

Em teorias de campos, um dos procedimentos mais poderosos para a obtenção de teorias duais é a construção da chamada ação mestre (GOMES; MALACARNE; SILVA, 1998),

utilizada nas duas seções anteriores, Seção 4.1 e Seção 4.2, que acomoda os dois campos. Em tal procedimento, os dois modelos são obtidos pelo uso das equações de movimento dos campos na ação original. Por outro lado, o MDN (ANACLETO et al., 2001) é baseado na transformação de um modelo com violação da simetria de calibre em outro simétrico por meio da adição iterativa de contratermos que seriam nulos na camada de massa. O método remete aos trabalhos de Ferrara, Freedman e Van Nieuwenhuizen (FREEDMAN; NIEUWENHUIZEN; FERRARA, 1976), e Ferrara e Scherk (FERRARA et al., 1977), que foram importantes na construção de ações de supergravidade com campos componentes. O método também foi aplicado com sucesso em teorias supersimetricas (FERRARI et al., 2006). No contexto proposto, o método é fortemente sugestivo de fornecer modelos duais, pois em todos os testes realizados até o momento, os modelos têm apresentado descrições equivalentes da física sob estudo (FARGNOLI et al., 2014), (CANTCHEFF et al., 2003), (TONIOLO et al., 2017).

O método também está apoiado na ideia de promover uma simetria de calibre global para uma versão local, presente na teoria dualizada. O novo modelo dual deve ser equivalente fisicamente ao modelo original e invariante por uma transformação de calibre local. Este capítulo é dedicado à introdução ao MDN por meio da construção de Lagrangeanas duais. Para isso, na Subseção 4.3.1 faremos uma breve discussão do método, que será aplicado no modelo de interesse em capítulos posteriores.

4.3.1 Descrição do Método

O MDN consiste em uma técnica iterativa em que a Lagrangeana dualizada $\mathcal{L}_D$ invariante por transformação de calibre local é construída a partir da Lagrangeana original $\mathcal{L}^{(0)}$, recursivamente, seguindo os seguintes passos (FARGNOLI et al., 2014):

I) definir a teoria de um campo vetorial A_μ pela Lagrangeana $\mathcal{L}^{(0)}$ que não possui simetria pela transformação de calibre $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \eta$;

II) calcular a variação da Lagrangeana $\mathcal{L}^{(0)}$ em relação ao campo A_μ, definindo a corrente de Noether K_μ:

$$\delta \mathcal{L}^{(0)} = K_\mu \delta A^\mu; \tag{158}$$

III) adicionar ao modelo um campo vetorial auxiliar B_μ, por meio da Lagrangeana modificada

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^{(0)} - B_\mu K^\mu, \tag{159}$$

tal que $\delta B_\mu = \delta A_\mu = \partial_\mu \eta$;

IV) uma vez que do passo anterior conclui-se que $\delta \mathcal{L}^{(1)} = -B_\nu \delta K^\nu$, escrever a Lagrangeana

$$\mathcal{L}^{(2)} = \mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L} \tag{160}$$

sendo $\mathcal{L}$ definida de modo que $\delta \mathcal{L}^{(2)} = \delta \mathcal{L}^{(1)} + \delta \mathcal{L} = 0$;

V) obter a equação de movimento para o campo B_μ a partir $\delta\mathcal{L}^{(2)} = 0$ e substituir na Lagrangeana invariante $\mathcal{L}^{(2)}$. O modelo dualizado será definido por $\mathcal{L}_D = \mathcal{L}^{(2)}$ após a eliminação do campo auxiliar B_μ.

Nos passos descritos acima, assumimos que é possível definir $\mathcal{L}^{(2)}$ invariante de calibre. Caso isso não fosse possível, o processo de adicionar termos continuaria até obter-se uma Lagrangeana invariante de calibre. Na próxima Subseção 4.3.2, este método será aplicado a um modelo apresentado no artigo (DESER; JACKIW, 1984). Assim como no Capítulo 6 utilizaremos o MDN para determinar o modelo dual da Lagrangeana proposta nesta tese.

4.3.2 Aplicação do Método Iterativo de Dualização de Noether: Modelo Autodual de Deser e Jackiw

A fim de exemplificar a aplicação do MDN, estudaremos o modelo autodual de Deser e Jackiw (DESER; JACKIW, 1984). Trata-se de um modelo no espaço-tempo em 3 dimensões, com um grau de liberdade massivo e governado por uma ação com derivada de primeira ordem em termos do campo vetorial. No artigo (DESER; JACKIW, 1984) mostra-se que o modelo é equivalente, por meio de uma transformação de Legendre, a uma teoria invariante de calibre com um campo vetorial com massa topológica. Aqui, mostraremos esta equivalência por meio do MDN.

Partimos de um modelo que não possui simetria pela transformação de calibre $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\eta$,

$$\mathcal{L}^{(0)} = \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu - \frac{1}{2}m\varepsilon^{\alpha\beta\mu}A_\alpha\partial_\beta A_\mu. \tag{161}$$

Para determinar a corrente de Noether devemos calcular a variação da Lagrangeana (161) em relação ao campo A_μ. Variando termo por termo, obtemos

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu\right) &= m^2 A^\mu \delta A_\mu \quad \text{e} \\ \delta\left(-\frac{1}{2}m\varepsilon^{\alpha\beta\mu}A_\alpha\partial_\beta A_\mu\right) &= -m\varepsilon^{\alpha\beta\mu}(\partial_\alpha A_\beta)\delta A_\mu, \end{aligned} \tag{162}$$

de forma que

$$\delta\mathcal{L}^{(0)} = (m^2 A^\mu - m\varepsilon^{\alpha\beta\mu}\partial_\alpha A_\beta)\delta A_\mu. \tag{163}$$

Assim, verificamos que a corrente de Noether é dada por

$$K^\mu = m^2 A^\mu - m\varepsilon^{\alpha\beta\mu}\partial_\alpha A_\beta. \tag{164}$$

Como a variação de $\mathcal{L}^{(0)}$ não é nula, devemos adicionar um campo auxiliar B_μ, tal que $\delta A_\mu = \delta B_\mu$, para obter a Lagrangeana $\mathcal{L}^{(1)}$, representada na equação (159), ou seja,

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^{(0)} - B_\mu K^\mu. \tag{165}$$

A seguir, calculamos a variação de $\mathcal{L}^{(1)}$, dada por

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}^{(1)} &= \delta\mathcal{L}^{(0)} - \delta(K^\mu B_\mu),\\ &= K^\mu\delta A_\mu - (\delta K^\mu B_\mu + K^\mu\delta B_\mu) \longrightarrow (\delta A_\mu = \delta B_\mu),\\ &= -\delta K^\mu B_\mu. \end{aligned} \tag{166}$$

A próxima etapa será obter a Lagrangeana $\mathcal{L}^{(2)}$, Para isso, vamos calcular a variação da corrente de Noether (164),

$$\delta K^\mu = -m^2\delta A^\mu. \tag{167}$$

Como a variação de $\mathcal{L}^{(2)}$ deve ser nula, adicionamos a $\mathcal{L}^{(1)}$ uma Lagrangeana $\mathcal{L}$, tal que essa condição seja satisfeita. Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(2)} &= \mathcal{L}^{(1)} + \frac{1}{2}m^2 B_\mu B^\mu, \qquad (168)\\ \delta\mathcal{L}^{(2)} &= -m^2 B_\mu\delta A^\mu + m^2 B_\mu\delta B^\mu \longrightarrow (\delta A_\mu = \delta B_\mu),\\ &= 0.\end{aligned}$$

Desta forma, obtemos a Lagrangeana invariante de calibre $\mathcal{L}^{(2)}$, dada por

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu - \frac{1}{2}m\varepsilon^{\alpha\beta\mu}A_\alpha\partial_\beta A_\mu \; - B_\mu K^\mu + \frac{1}{2}m^2 B_\mu B^\mu. \tag{169}$$

O próximo passo para a obtenção do modelo dual é a eliminação do campo auxiliar B^μ de $\mathcal{L}^{(2)}$. Para isso, devemos calcular a variação de (169) em relação ao campo B_μ:

$$\delta_B\mathcal{L}^{(2)} = -K^\mu\delta_B B_\mu + m^2 B^\mu\delta_B B_\mu = (-K^\mu + m^2 B^\mu)\delta_B B_\mu. \tag{170}$$

$$-K^\mu + m^2 B^\mu = 0 \Longrightarrow B^\mu = \frac{K^\mu}{m^2}. \tag{171}$$

Substituindo (171) em (169), obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_D &= \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu - \frac{1}{2}m\varepsilon^{\alpha\beta\mu}A_\alpha\partial_\beta A_\mu \; - \frac{K^\mu K_\mu}{m^2} + \frac{m^2}{2}\frac{K^\mu K_\mu}{m^4},\\ &= \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu - \frac{1}{2}m\varepsilon^{\alpha\beta\mu}A_\alpha\partial_\beta A_\mu \; - \frac{K^\mu K_\mu}{2m^2}. \qquad (172)\end{aligned}$$

Escrevemos

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu}\partial_\alpha A_\beta = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu}F_{\alpha\beta} \equiv F^\mu. \tag{173}$$

Utilizamos esta definição na multiplicação $(K^\mu K_\mu)$, em que K^μ está definido em (164):

$$\begin{aligned}K^\mu K_\mu &= (m^2 A^\mu - m\varepsilon^{\alpha\beta\mu}\partial_\beta A_\alpha)(m^2 A_\mu - m\varepsilon_{\rho\gamma\mu}\partial^\rho A^\gamma),\\ &= (m^2 A_\mu - mF^\mu)(m^2 A_\mu - mF_\mu),\\ &= m^4 A^\mu A_\mu - 2m^3 A^\mu F_\mu + m^2 F^\mu F_\mu. \qquad (174)\end{aligned}$$

Finalizando, substituimos (174) em (172):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_D &= \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu - \frac{1}{2}m\varepsilon^{\alpha\beta\mu}A_\alpha\partial_\beta A_\mu - \frac{K^\mu K_\mu}{2m^2}, \\
&= \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu - \frac{1}{2}mF^\mu A_\mu - \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu + mF^\mu A_\mu - \frac{1}{2}F^\mu F_\mu, \\
&= -\frac{1}{2}F^\mu F_\mu + \frac{1}{2}mF^\mu A_\mu, \qquad (175)
\end{aligned}$$

que é o modelo dual proposto no artigo (DESER; JACKIW, 1984).

5 Invariância de Calibre Residual em uma Eletrodinâmica Massiva com Violação da Simetria de Lorentz

Uma forma alternativa de gerar um termo de massa que viola a simetria de Lorentz foi investigada em (FELIPE et al., 2019), na qual uma formulação tipo Palatini do modelo de CFJ foi realizada. Interessantemente, esta formulação, com a participação do termo de CFJ, causou a emergência de uma contribuição de massa na densidade Lagrangeana do fóton. Enquanto o usual termo de massa de Proca quebra apenas a invariância de calibre, a presente contribuição de massa viola a simetria de Lorentz e, supostamente, a de calibre. Tais resultados parecem intrigantes, porque o modelo do qual se parte, no qual $F^{\mu\nu}$ é tratado como um campo independente, não apresenta nenhuma evidência de violação da simetria de calibre. Neste capítulo, estudamos uma versão mais geral do modelo massivo obtido em (FELIPE et al., 2019) e mostramos que há uma invariância de calibre residual no modelo obtido a partir da formulação do tipo Palatini. O conteúdo deste capítulo deu origem à publicação (MARQUES et al., 2022b).

Consideremos o modelo definido pela densidade Lagrangeana

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_O = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mu\alpha\kappa^\mu A^\nu \partial^\rho A^\sigma \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{2}\mu^2 M_{\mu\nu}A^\mu A^\nu - \frac{\beta}{2}(\kappa^\mu F_{\mu\nu})^2 \\ & + \mathcal{L}_f + e\overline{\psi}A^\mu\gamma_\mu\psi \end{aligned} \tag{176}$$

em que

$$\mathcal{L}_f = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \qquad \text{e} \qquad M_{\mu\nu} = \kappa^2\eta_{\mu\nu} - \rho\kappa_\mu\kappa_\nu.$$

Na Lagrangeana, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor do campo eletromagnético definido na Seção 4.2, e representa a carga do campo fermiônico ψ e o vetor κ^μ introduz no setor de calibre da teoria uma violação da simetria de Lorentz, no sentido proposto na referência (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1997). A modificação no setor do fóton da eletrodinâmica é introduzida pelos termos

$$\kappa^\mu A^\nu \partial^\rho A^\sigma \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \qquad M_{\mu\nu}A^\mu A^\nu \quad \text{e} \quad (\kappa^\mu F_{\mu\nu})^2.$$

A constante μ possui dimensão de massa enquanto que α, β e ρ são constantes adimensionais auxiliares que têm o propósito de selecionar diferentes possibilidades de modelos.

Para avaliar a consistência física da densidade Lagrangeana (176), primeiro calculamos o propagador clássico, seguindo-se uma análise explícita de seus polos. Além disso, também será estudada a consistência do modelo em relação à unitariedade da matriz S em nível de árvore. Isto será feito por meio do método de saturação do propagador por correntes conservadas.

5.1 Determinação do Propagador do Campo de Calibre

Pode-se inferir diversas características de um modelo por meio da análise dos propagadores dos campos envolvidos. O primeiro passo para determinar o propagador de um campo é a obtenção do operador de onda, proveniente da parte quadrática da Lagrangeana livre, quando escrita na forma (no caso do campo do fóton),

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2} A^\mu O_{\mu\nu} A^\nu. \tag{177}$$

Para isso, devem-se realizar integrações por partes e desprezarem-se os termos de superfície, partindo-se do pressuposto de que os campos se anulam no infinito. Por exemplo, o termo de Maxwell fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu), \\
&= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu), \\
&= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu) = \frac{1}{2}(A_\nu \Box A^\nu - A_\mu \partial_\nu \partial^\mu A^\nu), \\
&= \frac{1}{2} A^\mu (\Box \eta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu.
\end{aligned} \tag{178}$$

Para a teoria descrita pela densidade Lagrangeana (176), considerando a parte livre do campo de calibre, após a integração por partes de todos os termos, obtemos um operador de onda dado por

$$O_{\mu\nu} = (\Box + \mu^2\kappa^2)\theta_{\mu\nu} + \mu^2\kappa^2\omega_{\mu\nu} - 2\alpha S_{\mu\nu} - \rho\mu^2\Lambda_{\mu\nu}. \tag{179}$$

em que utilizamos as definições dos seguintes operadores:

$$\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\Box}, \tag{180}$$

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\Box}, \tag{181}$$

$$S_{\mu\nu} = \kappa^\rho \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\sigma, \tag{182}$$

$$\Lambda_{\mu\nu} = \kappa_\mu \kappa_\nu, \tag{183}$$

em que $\theta_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$ são os operadores de projeção transversal e longitudinal, respectivamente.

Adotaremos, no modelo que vamos estudar, $\beta = 0$, $\gamma = -1$ e $\mu^2 = 1$. O propagador é definido a partir do inverso do operador de onda, que satisfaz a relação

$$O_{\mu\sigma}(O^{-1})^\sigma{}_\nu = \eta_{\mu\nu}. \tag{184}$$

A fim de que o operador de onda seja invertido, é necessário que a álgebra dos operadores seja fechada. Para isso, definimos $\Sigma_{\mu\nu} \equiv \kappa_\mu \partial_\nu$ e $\overline{\Sigma}_{\mu\nu} \equiv \kappa_\nu \partial_\mu = \Sigma_{\nu\mu}$. Utilizando o fato de que $(O^{-1})_{\mu\nu}$ deve ter a forma

$$(O^{-1})^\sigma{}_\nu = b_1 \theta^\sigma{}_\nu + b_2 \omega^\sigma{}_\nu + b_3 S^\sigma{}_\nu + b_4 \Lambda^\sigma{}_\nu + b_5 \Sigma^\sigma{}_\nu + b_6 \overline{\Sigma}^\sigma{}_\nu, \tag{185}$$

podemos usar a identidade (184) para determinar as constantes b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 e b_6 em (185). A álgebra dos operadores acima definidos é exibida na Tabela 1, na qual utilizamos

$$f_{\mu\nu} = -(\kappa^2 p^2 + \lambda^2)\theta_{\mu\nu} - \lambda^2\omega_{\mu\nu} + p^2\Lambda_{\mu\nu} + \lambda\Sigma_{\mu\nu} + \lambda\overline{\Sigma}_{\mu\nu} \quad \textbf{e} \quad \lambda = \kappa^\mu\partial_\mu = \Sigma^\mu{}_\mu \tag{186}$$

Tabela 1 – Álgebra dos operadores - Multiplicação de linhas por colunas

$\times$	$\theta^\sigma{}_\nu$	$\omega^\sigma{}_\nu$	$S^\sigma{}_\nu$	$\Lambda^\sigma{}_\nu$	$\Sigma^\sigma{}_\nu$	$\overline{\Sigma}^\sigma{}_\nu$
$\theta_{\mu\sigma}$	$\theta_{\mu\nu}$	0	$S_{\mu\nu}$	$\Lambda_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{\Box}\overline{\Sigma}_{\mu\nu}$	$\Sigma_{\mu\nu} - \lambda\omega_{\mu\nu}$	0
$\omega_{\mu\sigma}$	0	$\omega_{\mu\nu}$	0	$\frac{\lambda}{\Box}\overline{\Sigma}_{\mu\nu}$	$\lambda\omega_{\mu\nu}$	$\overline{\Sigma}_{\mu\nu}$
$S_{\mu\sigma}$	$S_{\mu\nu}$	0	$f_{\mu\nu}$	0	0	0
$\Lambda_{\mu\sigma}$	$\Lambda_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{\Box}\Sigma_{\mu\nu}$	$\frac{\lambda}{\Box}\Sigma_{\mu\nu}$	0	$\kappa^2\Lambda_{\mu\nu}$	$\kappa^2\Sigma_{\mu\nu}$	$\lambda\Lambda_{\mu\nu}$
$\Sigma_{\mu\sigma}$	0	$\Sigma_{\mu\nu}$	0	$\lambda\Lambda_{\mu\nu}$	$\lambda\Sigma_{\mu\nu}$	$\Box\Lambda_{\mu\nu}$
$\overline{\Sigma}_{\mu\sigma}$	$\overline{\Sigma}_{\mu\nu} - \lambda\omega_{\mu\nu}$	$\lambda\omega_{\mu\nu}$	0	$\kappa^2\overline{\Sigma}_{\mu\nu}$	$\kappa^2\Box\omega_{\mu\nu}$	$\lambda\overline{\Sigma}_{\mu\nu}$

Fonte: Autoria própria.

A partir da equação (184) e utilizando a álgebra descrita pela Tabela 1, obtemos, no espaço dos momentos, em que fazemos as substituições

$$\partial_\mu \to ip_\mu, \text{ implica, } \Box \to -p^2 \tag{187}$$

o operador inverso

$$\begin{aligned}(O^{-1})_{\mu\nu} &= \frac{1}{D}\left\{-(p^2-\kappa^2)\theta_{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa^2}\left[D + \frac{\lambda^2}{\tilde{D}}(p^2H + 4\tilde{D})\right]\omega_{\mu\nu} - 2iS_{\mu\nu}\right\} + \\ &+ \frac{1}{D}\left\{-\frac{\lambda H}{\tilde{D}}(\Sigma_{\mu\nu} + \overline{\Sigma}_{\mu\nu}) - \frac{1}{\tilde{D}}(-\kappa^2 H + 4\tilde{D})\Lambda_{\mu\nu}\right\},\end{aligned} \tag{188}$$

com

$$D = (p^2-\kappa^2)^2 + 4(\kappa^2p^2 - \lambda^2), \qquad \tilde{D} = -(\kappa^2p^2 - \rho\lambda^2) + \kappa^4(1-\rho)$$

e

$$H = -\rho(p^2-\kappa^2) + 4\kappa^2(1-\rho).$$

O propagador do campo A_μ no espaço dos momentos é definido por

$$< A_\mu, A_\nu >= i(O^{-1})_{\mu\nu}. \tag{189}$$

Na próxima seção, analisaremos os polos deste propagador, assim como as restrições que eles impõem às soluções das equações de campo.

5.2 Polos do Propagador no Espaço dos Momentos e Equações de Campo

A partir das equações de campo e do propagador do campo dado em (189) podemos analisar diversos aspectos da consistência do modelo. A escolha do presente modelo para análise se deve a uma particularidade que observaremos para o caso $\rho = 1$. Vamos adotar um vetor de quebra de Lorentz do tipo espaço e escolher um sistema de referências tal que $\kappa^\mu = (0, \boldsymbol{\kappa}) = (0,0,0,t)$, resultando $\kappa^2 = -t^2$. Esta restrição é motivada pelo fato de que vetores tipo tempo não conduzem a uma teoria fisicamente consistente (FELIPE et al., 2019). Os quadrivetores para o momento e o potencial são definidos, respectivamente, por $p^\mu = (p^0, p_x, p_y, p_z)$ e $A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A}) = (A^0, A_x, A_y, A_z)$. O sistema de coordenadas adotado é tal que o vetor $\boldsymbol{\kappa}$ está na direção positiva do eixo z e $A_y = 0$. Deste modo, o potencial vetor $\boldsymbol{A}$ está contido no plano $x \times z$.

Com as escolhas adotadas acima, temos

$$\lambda = p_\mu \kappa^\mu = -t p_z \qquad \text{e} \qquad \kappa^\mu A_\mu = -t A_z. \tag{190}$$

Substituindo os resultados (190) no operador inverso (188), obtemos o propagador do campo (189)

$$\begin{aligned} < A_\mu A_\nu > \;=\; & \frac{i}{D}\left\{-(p^2+t^2)\theta_{\mu\nu} - \frac{1}{t^2}\left[D + \frac{t^2 p_z^2}{\tilde{D}}(p^2 H + 4\tilde{D})\right]\omega_{\mu\nu} - 2it\varepsilon_{\mu\nu z\beta}p^\beta\right\} \\ + \; & \frac{i}{D}\left\{\frac{t p_z H}{\tilde{D}}(\Sigma_{\mu\nu} + \overline{\Sigma}_{\mu\nu}) - \frac{t^2}{\tilde{D}}(t^2 H + 4\tilde{D})\delta^3_\mu \delta^3_\nu\right\}. \end{aligned} \tag{191}$$

Na expressão acima, o símbolo δ^3_μ representa o delta de Kronecker e é diferente de zero somente para $\mu = 3$, ou seja, para a componente z. Para as escolhas realizadas, temos

$$D = (p^2+t^2)^2 - 4t^2(p^2+p_z^2), \tag{192}$$

$$\tilde{D} = t^2[p^2 + \rho p_z^2 + t^2(1-\rho)], \tag{193}$$

$$H = -\rho(p^2+t^2) - 4t^2(1-\rho). \tag{194}$$

As massas físicas são polos simples do propagador e, portanto, devem ter valores não negativos. Para determinar os polos devemos verificar em que ponto o propagador é singular, ou seja, os pontos em que os denominadores D e $\tilde{D}$ se anulam. A partir dessa análise, poderemos saber se os polos correspondem à propagação de graus de liberdade físicos no modelo.

Os polos podem ser determinados de forma simples, observando que as equações (192) e (193) podem ser escritas na forma

$$D = (p_0^2 - m_1^2)(p_0^2 - m_2^2) \qquad \text{e} \qquad \tilde{D} = t^2(p_0^2 - \tilde{m}^2),$$

fornecendo os polos m_1^2, m_2^2 e $\tilde{m}^2$, dados por

$$m_1^2 = p_\perp^2 + (p_z + t)^2, \tag{195}$$
$$m_2^2 = p_\perp^2 + (p_z - t)^2, \tag{196}$$
$$\tilde{m}^2 = p_\perp^2 + (1-\rho)(p_z^2 - t^2), \tag{197}$$

em que $p^2 = p_0^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2$ e $p_\perp^2 = p_x^2 + p_y^2$.

O próximo passo da análise é investigar como os polos afetam a equação de movimento do campo A_μ, que corresponde à condição $O_{\mu\nu}A^\nu = 0$, com $O_{\mu\nu}$ definido em (179) e os operadores (180)-(183) no espaço dos momentos, ou seja, com as substituições (187),

$$(-p^2 + \kappa^2)A_\mu + (p\cdot A)p_\mu - \rho(\kappa\cdot A)\kappa_\mu + 2i\varepsilon_{\mu\nu\gamma\beta}\kappa^\gamma p^\beta A^\mu = 0. \tag{198}$$

Nesta equação, utilizamos a notação $p\cdot A = p^\mu A_\mu = p^0 A_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}$ (aplicamos a mesma notação para $\kappa\cdot A$). Multiplicando a equação (198) por p^μ, obtemos a condição de calibre,

$$p\cdot A = \frac{\rho\lambda}{\kappa^2}(\kappa\cdot A), \tag{199}$$

que substituída na equação de campo (198), com as escolhas adotadas em (190), nos leva a

$$-(p^2 + t^2)A_\mu - \rho(p_z p_\mu + t^2\delta_\mu{}^z)A_z + 2it\varepsilon_{\mu\nu z\beta}p^\beta A^\nu = 0. \tag{200}$$

A expressão acima equivale a quatro equações, uma para cada valor do índice μ,

$$-(p^2 + t^2)A_z - \rho(p_z^2 - t^2)A_z = 0, \tag{201}$$
$$-(p^2 + t^2)A_x + \rho p_z p_x A_z + 2it\phi p_y = 0, \tag{202}$$
$$\rho p_z p_y A_z + 2it(p_0 A_x - p_x\phi) = 0, \tag{203}$$
$$-(p^2 + t^2)\phi - \rho p_z p_0 A_z - 2it p_y A_x = 0. \tag{204}$$

Verificamos, que para, $A_z \neq 0$ o polo $p_0^2 = \tilde{m}^2$ dado em (197) é solução da equação de movimento (201). Portanto, este polo é consistente com as soluções das equações de movimento para o campo de calibre, sendo, portanto, um candidato a um modo massivo de propagação.

O efeito dos polos m_1^2 e m_2^2 nas equações de movimento pode ser obtido substituindo o vínculo $p_0^2 = \tilde{m}^2$, obtido da (201), nas equações (202)-(204). Adotando um calibre em que $\phi = 0$, após manipulação algébrica simples obtemos

$$(p_0^2 - p_y^2)A_x = 0. \tag{205}$$

Usando a (197), podemos mostrar que para $A_x \neq 0$ a equação (205) equivale a

$$p_x^2 + (1-\rho)(p_z^2 - t^2) = 0. \tag{206}$$

Como p_x e p_z são componentes independentes, a (206) será sempre satisfeita somente se $p_x = 0$ e $p_z = \pm t$. A relação desta solução com os polos m_1^2 e m_2^2 pode ser demonstrada da seguinte forma.

Caso I: Vamos impor que $p_0^2 = \tilde{m}^2 = m_1^2$.

Usando (195) e (197), obtemos

$$\rho p_z^2 + 2tp_z + t^2(2-\rho) = 0, \tag{207}$$

cujas soluções são,

$$p_z = \begin{cases} -t, & \text{se } 0 < \rho \leq 1 \\ \dfrac{t(\rho-2)}{\rho}, & \text{se } \rho < 0 \text{ ou } \rho > 1. \end{cases} \tag{208}$$

Vemos portanto, que para $0 < \rho \leq 1$, obtemos a solução $p_z = -t$ de (206). O momento associado com este modo de propagação é $\boldsymbol{p} = (0, p_y, -t)$. Assim,

$$p \cdot A = p^0\phi - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{A} = tA_z. \tag{209}$$

Para obter este resultado utilizamos as escolhas feitas anteriormente: $A^0 = \phi = 0$ e $A_y = 0$. Mostraremos agora que a equação (209) pode ser usada para fixar o valor de ρ. Utilizando a (199) nas condições (190) e lembrando que $\kappa^2 = -t^2$, obtemos

$$p \cdot A = \rho t A_z. \tag{210}$$

Comparando esta equação com a (209), concluímos que $\rho = 1$. De fato, levando este valor nas expressões dos polos (195)-(197) e fazendo $p_z = -t$ obtemos,[1]

$$\tilde{m}^2 = m_1^2 = \mid \boldsymbol{p} \mid^2, \tag{211}$$

$$m_2^2 = \mid \boldsymbol{p} \mid^2 + 4t^2. \tag{212}$$

Desse modo concluímos que existem dois modos de propagação do campo: um modo massivo dado pelo polo m_2^2 e um modo sem massa dado pelo polo $\tilde{m}^2$.

Caso II: Vamos impor que $p_0^2 = \tilde{m}^2 = m_2^2$

Usando (196) e (197), obtemos

$$\rho p_z^2 - 2tp_z + t^2(2-\rho) = 0 \tag{213}$$

cujas soluções são,

$$p_z = \begin{cases} t, & \text{se } 0 < \rho \leq 1 \\ \dfrac{t(2-\rho)}{\rho}, & \text{se } \rho < 0 \text{ ou } \rho > 1. \end{cases} \tag{214}$$

[1] A relação de dispersão relativística para uma partícula com massa m é dada por $p^2 = m^2 > 0$, ou seja, $(p^0)^2 = \mid \boldsymbol{p} \mid^2 + m^2$. Para uma partícula sem massa, $(p^0)^2 = \mid \boldsymbol{p} \mid^2$.

Vemos, portando, que para $0 < \rho \leq 1$, obtemos a solução $p_z = t$ de (206). O momento associado com este modo de propagação é $\boldsymbol{p} = (0,p_y,t)$. Seguindo os mesmos passos do caso anterior concluiremos que $\rho = 1$ e os modos de propagação são dados por

$$\tilde{m}^2 = m_2^2 = \mid \boldsymbol{p} \mid^2 , \tag{215}$$

$$m_1^2 = \mid \boldsymbol{p} \mid^2 + 4t^2. \tag{216}$$

Assim, obtemos os mesmos modos de propagação do caso anterior, mas com a direção de propagação da componente p_z invertida.

O caso em que $A_x = 0$ e $A_z \neq 0$ não é fisicamente relevante, uma vez que resultará em um possível polo múltiplo que, portanto, não pode ser interpretado como polo físico. Para $A_x \neq 0$ e $A_z = 0$, uma solução física aceitável ocorre para $p_y = 0$ e $p_z = \pm t$. Com o valor da componente p_z correspondendo aos modos de propagação analisados anteriormente.

5.3 Análise da Unitariedade

Uma vez analisado o modelo em relação aos polos do propagador e a natureza dos graus de liberdade como modos transversais e longitudinais, passamos agora à análise da unitariedade do modelo em relação aos estados de partículas no espaço de Hilbert. Esta questão pode ser investigada pelo método do propagador saturado por correntes conservadas (CASANA; FERREIRA; MOREIRA, 2012). Nesta abordagem o propagador saturado é definido por

$$\mathcal{S}P = J^\mu < A_\mu, A_\nu >_O J^\nu, \tag{217}$$

em que J^μ é a corrente conservada satisfazendo $p_\mu J^\mu = 0$. O método consiste em calcular os resíduos do polo do propagador (217). Quando a parte imaginária do resíduo for não-negativa, a unitariedade no espaço de Hilbert é preservada e o polo representa um grau de liberdade físico.

Utilizando a (191), os operadores (180)-(183) no espaço dos momentos, ou seja, com as substituições (187) e a conservação da corrente J_μ, temos o operador saturado (217) dado por

$$\mathcal{S}P = \frac{i}{D}\left\{-(p^2+t^2)J^2 - \frac{t^2 J_z^2}{\tilde{D}}(t^2 H + 4\tilde{D})\right\}, \tag{218}$$

em que

$$D = (p_0^2 - m_1^2)(p_0^2 - m_2^2), \tag{219}$$

$$\tilde{D} = t^2(p_0^2 - \tilde{m}^2), \tag{220}$$

$$H = -\rho(p^2+t^2) - 4t^2(1-\rho). \tag{221}$$

A partir dos resultados apresentados em (208) para $\tilde{m}^2 = m_1^2$ e (214) para $\tilde{m}^2 = m_2^2$, determinaremos os resíduos do propagador saturado (218) quando $p_z = \pm t$.

Para $p_z = \pm t$, as partes imaginárias $\mathcal{R}_{(1,2)}$ dos resíduos associados aos polos $\tilde{m}^2 = m_1^2$ e $\tilde{m}^2 = m_2^2$ são iguais e podem ser obtidas a partir de (RILEY, 2006)

$$\mathcal{R}_{(1,2)} = \lim_{p_0^2 \longrightarrow \tilde{m}^2} \frac{1}{p_0^2 - \tilde{m}^2 - 4t^2} \left\{ -(p_0^2 - \tilde{m}^2)J^2 + \frac{4t^2(1-\rho)}{(p_0^2 - \tilde{m}^2)} - t^2 J_z^2 (4-\rho) \right\}. \tag{222}$$

O limite acima estará definido somente quando $\rho = 1$. Este resultado é coerente com as soluções (208) e (214), em que ρ pode assumir valores no intervalo $0 < \rho \leq 1$. Desse modo, para $\rho = 1$ o resíduo (222) é dado por

$$\mathcal{R}_{(1,2)} = \frac{3}{4} J_z^2. \tag{223}$$

O resíduo acima é positivo, indicando que os polos correspondentes preservam a unitariedade no espaço de Hilbert.

5.4 Invariância de Calibre Residual

Verificamos que a Lagrangeana (176) é consistente para $\rho = 1$, por meio dos polos do propagador e das equações de campo. Certificamos que é preservada a unitaridade no espaço de Hilbert, e que os polos representam graus de liberdade físicos. Outra questão interessante de observar é que o termo de massa

$$M_{\mu\nu} = \kappa^2 \eta_{\mu\nu} - \rho \kappa_\mu \kappa_\nu, \tag{224}$$

não teria inversa para $\rho = 1$:

$$L_{\mu\nu} = (M^{-1})_{\mu\nu} = \frac{\theta_{\mu\nu}}{\kappa^2} + \frac{\omega_{\mu\nu}}{\kappa^2} + \frac{\rho \Lambda_{\mu\nu}}{\kappa^4 (1-\rho)}. \tag{225}$$

Tal inversa é essencial para a determinação do modelo dual invariante de calibre, conforme veremos no Capítulo 6.

Os resultados apresentados sugerem uma invariância de calibre residual. Verificaremos esta possibilidade analisando a densidade Lagrangeana $\mathcal{L}_M$ com o termo que viola a simetria de calibre,

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} A^\mu M_{\mu\nu} A^\nu. \tag{226}$$

Ao considerar a transformação de calibre $A^\mu \longrightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi$, teremos;

$$\mathcal{L}_{TM} = \frac{1}{2} A^\mu M_{\mu\nu} A^\nu + A^\mu M_{\mu\nu} (\partial^\nu \chi) + \frac{1}{2} (\partial^\mu \chi) M_{\mu\nu} (\partial^\nu \chi). \tag{227}$$

Se $\partial^\mu \chi$ é proporcional a κ^μ, tal que $\partial^\mu \chi = \beta(z) \kappa^\mu$, com $\beta(z)$ uma função adimensional de z (assumindo que o eixo z é paralelo ao vetor de fundo), obtemos, explicitamente, usando (224),

$$\begin{aligned} (\partial^\mu \chi) M_{\mu\nu} &= \beta(z) \kappa^\mu (\kappa^2 \eta_{\mu\nu} - \rho \kappa_\mu \kappa_\nu), \\ &= \beta(z) \kappa^2 \kappa_\nu (1-\rho), \end{aligned} \tag{228}$$

que será anulado, caso seja $\rho = 1$. Assim, obtemos uma invariância entre as densidades Lagrangeanas (226) e (227). Desta forma, observamos que a densidade Lagrangeana (176) se mostra invariante sob uma classe de transformações de calibre: aquelas em que a função escalar $\chi(x)$ apresenta gradiente quadridimensional dado por $\partial^\mu \chi = \beta(z)\kappa^\mu$. Trata-se de uma invariância de calibre residual.

6 Equivalência entre Modelos Duais em Níveis Clássico e Quântico

Neste capítulo, apresentaremos uma análise geral da equivalência entre modelos duais obtidos pelo MDN descrito na Subseção 4.3.1. Para isso, será necessário levar em consideração os novos termos de interação que aparecem no modelo dualizado. Em particular, mostraremos que a interação corrente-corrente com quatro férmions, obtida no modelo dual, é fundamental para estabelecer a equivalência física dos modelos clássicos. Esta é uma contribuição original do trabalho que é um primeiro passo importante para uma análise pertubativa completa da equivalência entre os modelos. A equivalência também será desenvolvida em nível quântico na ordem de um *loop*, partindo da equivalência *on-shell* para *off-shell*, este desenvolvimento gerou a publicação do artigo (MARQUES et al., 2022a).

As equivalências serão demonstradas em cinco seções. Na Seção 6.1 iniciamos determinando a Lagrangeana dualizada referente à Lagrangeana (176), com a utilização do MDN, abordado na Subseção 4.3.1. A seguir na Seção 6.2 reescrevemos esta Lagrangeana dualizada com os operadores. A relação entre os propagadores dos modelos será obtida na Seção 6.3. Na Seção 6.4 apresentamos a equivalência entre os modelos no nível árvore utilizando o espalhamento Møller. Finalizando, na Seção 6.5, mostramos a equivalência dos modelos em ordem de um *loop*, partindo da equivalência *on-shell* para uma amplitude simples de um *loop* e, em seguida, mostrando que a equivalência é válida *off-shell*.

6.1 Dualização da Lagrangeana

Nesta seção aplicamos o MDN na densidade Lagrangeana (176) para a construção da densidade Langrageana dual $\mathcal{L}_D$.

Uma Lagrangeana é invariante sob a transformação de calibre $A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \eta$, quando sua variação é nula após esta transformação. A densidade Lagrangeana (176), não é invariante de calibre para uma função escalar geral $\eta(x)$ (Seção 5.4 demonstra que há uma invariância residual para um caso particular do tensor de massa). Iniciamos calculando a variação de cada um dos termos em (176) em relação ao campo A_μ,

- $\delta\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) = \partial_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu.$
- $\delta(\gamma\alpha\kappa^\mu A^\nu \partial^\rho A^\sigma \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}) = 2\gamma\alpha\kappa_\mu \partial_\rho A_\sigma \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\delta A_\nu.$
- $\delta\left(\frac{1}{2}\mu^2 M_{\mu\nu}A^\mu A^\nu\right) = -\mu^2 M^{\mu\nu}A_\mu \delta A_\nu.$

- $\delta\left(-\frac{\beta}{2}(\kappa^\mu F_{\mu\nu})^2\right) = \beta\kappa_\mu\kappa_\rho\partial^\rho F^{\mu\nu}\delta A_\nu + \beta\kappa^\rho\kappa^\nu\partial^\mu F_{\rho\mu}\delta A_\nu.$
- $\delta(e\overline{\psi}A^\mu\gamma_\mu\psi) = e\overline{\psi}\gamma^\nu\psi\delta A_\nu.$

A partir das variações acima, podemos calcular $\delta\mathcal{L}_O$. Usando a definição (158), concluímos que a corrente de Noether é dada por:

$$K^\nu = \partial_\mu F^{\mu\nu} + 2\gamma\alpha\kappa_\mu\partial_\rho A_\sigma\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} + \mu^2 M^{\mu\nu}A_\mu + \beta\kappa_\mu\kappa_\rho\partial^\rho F^{\mu\nu} - \beta\kappa^\rho\kappa^\nu\partial^\mu F_{\rho\mu} + e\overline{\psi}\gamma^\nu\psi. \quad (229)$$

Dando seguimento aos passos listados na Subseção 4.3.1, como $\delta\mathcal{L}_O \neq 0$, vamos definir a Lagrangeana (159) e calcular sua variação:

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}_O - K^\mu B_\mu, \quad (230)$$

tal que

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}^{(1)} &= \delta\mathcal{L}_O - \delta(K^\mu B_\mu),\\ &= K^\nu\delta A_\nu - (\delta K^\mu B_\mu + K^\mu\delta B_\mu),\\ &= -\delta K^\nu B_\nu, \end{aligned} \quad (231)$$

em que foi utilizada a condição $\delta A_\mu = \delta B_\mu$. Dada a variação da corrente de Noether,

$$\delta K^\nu = \delta(-\mu^2 M^{\mu\nu}A_\mu) = -\mu^2 M^{\mu\nu}\delta A_\mu, \quad (232)$$

obtemos

$$\delta\mathcal{L}^{(1)} = (-\mu^2 M^{\mu\nu}\delta A_\mu)B_\nu. \quad (233)$$

A partir da Lagrangeana (230) e da variação (233), define-se a próxima Lagrangeana, de modo que a sua variação $\delta\mathcal{L}^{(2)}$ seja nula:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \mathcal{L}^{(1)} + \frac{\mu^2}{2}B^\mu M_{\mu\nu}B^\nu \quad (234)$$

De fato, calculando a variação de $\mathcal{L}^{(2)}$, temos

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}^{(2)} &= \delta\mathcal{L}^{(1)} + \frac{\mu^2}{2}M_{\mu\nu}\delta(B^\mu B^\nu),\\ &= -\mu^2 M^{\mu\nu}B_\mu\delta_B B_\nu + \mu^2 M_{\mu\nu}B^\nu(\delta_B B^\mu),\\ &= 0. \end{aligned} \quad (235)$$

em que na última linha foi utilizado o fato de que a variação dos campos A^μ e B^μ são iguais. Desse modo, obtemos que a densidade Lagrangeana $\mathcal{L}^{(2)}$ é invariante de calibre:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \mathcal{L}_O - B_\mu K^\mu + \frac{\mu^2}{2}B^\mu M_{\mu\nu}B^\nu. \quad (236)$$

Com $\mathcal{L}^{(2)}$ determinada, procedemos à eliminação do campo auxiliar B^μ desta Lagrangeana. Para isso, calculamos a variação de $\mathcal{L}^{(2)}$ em relação ao campo B_μ, ou seja, $\delta_B\mathcal{L}^{(2)}$,

$$\delta_B\mathcal{L}^{(2)} = (-K_\mu + \mu^2 M_{\mu\nu}B^\nu)\delta B^\mu \tag{237}$$

Como $\delta_B\mathcal{L}^{(2)} = 0$, a igualdade (237) resulta na equação de movimento do campo B_μ:

$$K_\mu - \mu^2 M_{\mu\nu}B^\nu = 0, \tag{238}$$

o que conduz ao resultado

$$B_\mu = \frac{L_{\mu\nu}K^\nu}{\mu^2}, \tag{239}$$

em que definimos $L_{\mu\nu} = (M^{-1})_{\mu\nu}$.

Substituindo (239) em (236), determinamos a Lagrangeana dual $\mathcal{L}_D$, invariante de calibre:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_D &= \mathcal{L}_O - \frac{L_{\mu\nu}K^\nu K^\mu}{\mu^2} + \frac{1}{2\mu^2}L^{\mu\rho}M_{\mu\nu}L^{\nu\sigma}K_\rho K_\sigma,\\ &= \mathcal{L}_O - \frac{L_{\mu\nu}K^\nu K^\mu}{2\mu^2}.\end{aligned} \tag{240}$$

6.2 Lagrangeana Dualizada com Operadores

Abordaremos nesta seção uma densidade Lagrangeana de forma geral

$$\mathcal{L}_O = \mathcal{L}_A + \frac{1}{2}\mu^2 A^\mu M_{\mu\nu}A^\nu - J_\mu A^\mu + \mathcal{L}_F. \tag{241}$$

Na qual, este modelo representa uma extensão violadora da simetria de Lorentz da QED. Um exemplo explícito deste tipo de modelo foi apresentado pela densidade Lagrangeana (176). O termo $\mathcal{L}_A$ fornece a parte invariante de calibre do setor do fóton, que pode abranger termos invariantes no nível da ação; $\mathcal{L}_F$ é a densidade Lagrangeana de férmions livres; $M_{\mu\nu}$ é um tensor adimensional, dado que μ é um parâmetro com a dimensão de massa.

É possível construir, a partir de (241), um modelo invariante de calibre por meio do MDN, conforme discutido detalhadamente na Seção 6.1, em que se obteve

$$\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_O - \frac{1}{2\mu^2}K_\mu L^{\mu\nu}\, K_\nu \tag{242}$$

em que $L_{\mu\nu} = (M^{-1})_{\mu\nu}$. Nos casos anteriores, levou-se em conta apenas a Lagrangeana livre do fóton. Na sequência deste capítulo, veremos que a corrente de Noether pode incluir termos dependentes do campo fermiônico.

Inicialmente, observamos que, após a integração por partes na ação, a densidade Lagrangeana (241) pode ser representada por

$$\mathcal{L}_O = \frac{1}{2}A^\mu(\mathcal{O}_O)_{\mu\nu}A^\nu - J^\mu A_\mu + \mathcal{L}_F, \tag{243}$$

em que $(\mathcal{O}_O)_{\mu\nu}$ é o operador diferencial que aparece na equação de onda. Desse modo, a variação da Lagrangeana (243) em relação ao campo A_μ é dada por

$$\delta\mathcal{L}_O = [(\mathcal{O}_O)^{\mu\nu}A_\nu - J^\mu]\delta A_\mu. \tag{244}$$

O operador diferecial $(\mathcal{O}_O)_{\mu\nu}$ contém termos de primeira e segunda ordem nas derivadas, além do termo de massa (ordem zero nas derivadas). A partir desse resultado podemos comparar as equações (158) e (244), e concluir que

$$K^\mu = (\mathcal{O}_O)^{\mu\nu}A_\nu - J^\mu. \tag{245}$$

Substituindo a equação (245) no segundo termo da Lagrangeana dual $\mathcal{L}_D$ em (242), utilizando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\mu^2}K^\mu L_{\mu\nu}\,K^\nu &= \frac{1}{2\mu^2}[(\mathcal{O}_O)^{\mu\gamma}A_\gamma - J^\mu]L_{\mu\nu}[(\mathcal{O}_O)^{\nu\beta}A_\beta - J^\nu],\\ &= \frac{1}{2}A_\mu\left[\frac{1}{\mu^2}(\mathcal{O}_O)^{\mu\gamma}L_{\gamma\beta}(\mathcal{O}_O)^{\beta\nu}\right]A_\nu - \frac{1}{\mu^2}J^\mu L_{\mu\nu}[(\mathcal{O}_O)^{\nu\beta}A_\beta]\\ &+ \frac{1}{2\mu^2}J^\mu L_{\mu\nu}J^\nu.\end{aligned} \tag{246}$$

Iremos considerar o modelo (243) com a parte quadrática $\frac{1}{2}A_\mu\mathcal{O}_O^{\mu\nu}A_\nu$ definida por

$$\mathcal{O}_O^{\mu\nu} = \mathcal{O}^{\mu\nu} + \mu^2 M^{\mu\nu}, \tag{247}$$

em que $\mathcal{O}^{\mu\nu}$ representa o operador correspondente à parte invariante de calibre do modelo, obtido quando o termo de massa é omitido. Em particular, substituindo a igualdade (247) no primeiro termo da segunda igualdade em (246), temos

$$(\mathcal{O}_O)^{\mu\gamma}L_{\gamma\beta}(\mathcal{O}_O)^{\beta\nu} = (\mathcal{O}_O)^{\mu\gamma}L_{\gamma\beta}(\mathcal{O}^{\beta\nu} + \mu^2 M^{\beta\nu}) = (\mathcal{O}_O)^{\mu\gamma}L_{\gamma\beta}\mathcal{O}^{\beta\nu} + \mu^2(\mathcal{O}_O)^{\mu\nu}. \tag{248}$$

Na última igualdade acima, utilizamos $L^{\mu\beta}M_{\beta\nu} = \delta^\mu{}_\nu$.

Substituindo a (243) e a (246) na (242), levando em conta o resultado (248), obtemos a Lagrangeana dualizada:

$$\mathcal{L}_D = \frac{1}{2}A_\mu\left[-\frac{1}{\mu^2}(\mathcal{O}_O)^{\mu\gamma}L_{\gamma\beta}\mathcal{O}^{\beta\nu}\right]A_\nu + \mathcal{L}'_I + \mathcal{L}'_F, \tag{249}$$

em que

$$\mathcal{L}'_I = -J^\mu\left(A_\mu - \frac{1}{\mu^2}L_{\mu\nu}(\mathcal{O}_O)^{\nu\beta}A_\beta\right) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}'_F = \mathcal{L}_F - \frac{1}{2\mu^2}J^\mu L_{\mu\nu}J^\nu. \tag{250}$$

É importante notar que na (249) novos termos de interação foram gerados pelo procedimento de dualização: um não mínimo, dado pelo segundo termo de $\mathcal{L}'_I$, e um acoplamento tipo Thirring corrente-corrente que aparece no segundo termo da expressão $\mathcal{L}'_F$.

6.3 Relação entre os Propagadores

Nesta seção, obteremos uma relação entre os propagadores dos modelos original (243) e dualizado (249), generalizando a relação demonstrada em (SCARPELLI; CANTCHEFF; HELAYëL-NETO, 2004).

Iremos analisar agora a parte quadrática da ação de calibre dualizada, dada pela densidade Lagrangeana (249). Desta expressão identificamos o operador diferencial do modelo dualizado:

$$\mathcal{O}_D^{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu^2}(\mathcal{O}_O)^{\mu\gamma} L_{\gamma\beta} \mathcal{O}^{\beta\nu}. \tag{251}$$

É importante lembrar que o operador $\mathcal{O}^{\beta\nu}$ que aparece em (251) corresponde à parte invariante de calibre de (243) e, portanto, não possui inversa. Por isso, é necessário introduzir na Lagrangeana (243) um termo de fixação de calibre proporcional a $(\partial_\mu A^\mu)^2$. Com esta modificação, o operador diferencial da parte quadrática do setor invariante de calibre é redefinido para

$$\tilde{\mathcal{O}}^{\mu\nu} = \mathcal{O}^{\mu\nu} + \frac{\Box}{\tau}\omega^{\mu\nu} \tag{252}$$

em que τ é o parâmetro de fixação de calibre e $\omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\Box}$ é o projetor longitudinal responsável pela quebra da transversalidade de $\mathcal{O}^{\mu\nu}$.

Com a introdução do termo de fixação de calibre, a expressão (251) será modificada pela substituição $\mathcal{O}^{\beta\nu} \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}^{\beta\nu}$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_D^{\mu\nu} &= -\frac{1}{\mu^2}(\mathcal{O}_O)^{\mu\gamma} L_{\gamma\beta} \tilde{\mathcal{O}}^{\beta\nu}, \\ &= -\frac{1}{\mu^2}(\mathcal{O}_O)^{\mu\gamma} L_{\gamma\beta} \mathcal{O}^{\beta\nu} + \frac{\Box}{\tau}\left[-\frac{1}{\mu^2}(\mathcal{O}_O)^{\mu\gamma} L_{\gamma\beta}\omega^{\beta\nu}\right]. \end{aligned} \tag{253}$$

Para obtermos a equação acima, substituimos o resultado (252) na equação (253). A equação (253) contém um novo termo de fixação de calibre em que $\omega^{\mu\nu}$ foi substituído pelo operador $\left[-\frac{1}{\mu^2}(\mathcal{O}_O)^{\mu\gamma} L_{\gamma\beta}\omega^{\beta\nu}\right]$.

A partir dos resultados anteriores podemos calcular o propagador da teoria dualizada:

$$\langle A_\mu, A_\nu \rangle_D = i(\mathcal{O}_D^{-1})_{\mu\nu}, \tag{254}$$

em que o operador inverso de (253) é dado por

$$(\mathcal{O}_D^{-1})_{\mu\nu} = -\mu^2 (\tilde{\mathcal{O}}^{-1})_{\mu\gamma} M^{\gamma\beta} (\mathcal{O}_O^{-1})_{\beta\nu}. \tag{255}$$

Deduziremos, agora, uma expressão do propagador dualizado (255) exclusivamente em termos dos propagadores do modelo original (243). Isolando o operador $\mathcal{O}^{\mu\nu}$ representado em (252) e substituindo na expressão (247) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_O^{\mu\nu} &= \mathcal{O}^{\mu\nu} + \mu^2 M^{\mu\nu}, \\ &= \tilde{\mathcal{O}}^{\mu\nu} - \frac{\Box}{\tau}\omega^{\mu\nu} + \mu^2 M^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{256}$$

Multiplicando (256) pela direita por $(\tilde{O}^{-1})_{\mu\nu}$ e pela a esquerda por $(O_O^{-1})_{\mu\nu}$, obtemos, após uma álgebra elementar,

$$(\tilde{O}^{-1})_{\mu\nu} = (O_O^{-1})_{\mu\nu} + \mu^2(\tilde{O}^{-1})_{\mu\gamma}M^{\gamma\beta}(O_O^{-1})_{\beta\nu} - \frac{\Box}{\tau}(\tilde{O}^{-1})_{\mu\gamma}\omega^{\gamma\beta}(O_O^{-1})_{\beta\nu}. \tag{257}$$

Vamos analisar o último termo da equação (257), levando em consideração que o operador inverso de (252) é dado por

$$(\tilde{O}^{-1})^{\mu\nu} = (O_{Tr}^{-1})^{\mu\nu} + \frac{\tau}{\Box}\omega^{\mu\nu} \tag{258}$$

em que $(O_{Tr}^{-1})^{\mu\nu}$ é a parte transversal de $(\tilde{O}^{-1})^{\mu\nu}$. O primeiro termo da decomposição (258) é explicado pelo fato de que o modelo que origina o operador diferencial $O^{\mu\nu}$ é invariante de calibre. Destacando o último termo da equação (257) e substituindo a (258) temos

$$\begin{aligned} -\frac{\Box}{\tau}(\tilde{O}^{-1})_{\mu\gamma}\omega^{\gamma\beta}(O_O^{-1})_{\beta\nu} &= -\frac{\Box}{\tau}\left((O_{Tr}^{-1})_{\mu\gamma} + \frac{\tau}{\Box}\omega_{\mu\gamma}\right)\omega^{\gamma\beta}(O_O^{-1})_{\beta\nu}, \\ &= -\omega_\mu{}^\beta(O_O^{-1})_{\beta\nu}, \\ &= \theta_\mu{}^\beta(O_O^{-1})_{\beta\nu} - (O_O^{-1})_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{259}$$

em que $\omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \theta_{\mu\nu}$, tendo sido $\theta_{\mu\nu}$ definido em (180). Substituindo o resultado acima e a equivalência (255) na equação (257) resulta em

$$(O_D^{-1})_{\mu\nu} = \theta_\mu{}^\beta(O_O^{-1})_{\beta\nu} - (\tilde{O}^{-1})_{\mu\nu}. \tag{260}$$

A relação entre propagadores mostrada na identidade (260) é notavelmente simples e mostra que o propagador dualizado pode ser determinado diretamente dos propagadores do modelo original (243) e da parte invariante de calibre com adição de termo de fixação de calibre.

6.4 Equivalência em Nível Árvore

Nesta seção, mostraremos a equivalência dos modelos descritos pelas densidades Lagrangeanas $\mathcal{L}_O$ e $\mathcal{L}_D$, dadas, respectivamente, em (243) e (249), por meio do processo de espalhamento Møller (elétron-elétron).

Da expressão (249), definimos a corrente modificada

$$\tilde{J}_\mu = J_\nu\left[\delta^\nu{}_\mu - \frac{1}{\mu^2}L^{\nu\beta}(O_O)_{\beta\mu}\right]. \tag{261}$$

O primeiro passo é mostrar que esta nova corrente é conservada. Para isso, utilizaremos a expressão no espaço dos momentos

$$p^\mu\tilde{J}_\mu = p^\mu\left[J_\mu - \frac{1}{\mu^2}(O_O)_{\mu\beta}L^{\beta\nu}J_\nu\right]. \tag{262}$$

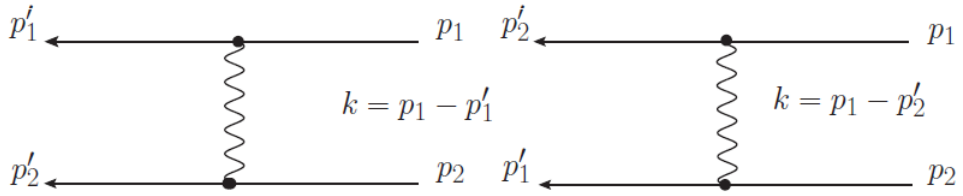
Substituindo (247), no segundo termo da expressão (262), resulta em

$$-\frac{1}{\mu^2}p^\mu(O_O)_{\mu\beta}L^{\beta\nu}J_\nu = -\frac{1}{\mu^2}p^\mu(O_{\mu\beta}+\mu^2 M_{\mu\beta})L^{\beta\nu}J_\nu = -p^\nu J_\nu, \tag{263}$$

em que usamos o fato de que $L_{\mu\nu} = M^{-1}_{\mu\nu}$ e que $O_{\mu\beta}$ é transversal (o modelo original sem massa é invariante de calibre). Diante deste resultado, conclui-se de (262) que $p^\mu \tilde{J}_\mu = 0$, ou seja, a corrente é conservada.

Considere o espalhamento elétron-elétron em nível árvore (THOMSON, 2013). Para o modelo original (243), a amplitude de espalhamento é representada pelos diagramas exibidos na Figura 2.

Figura 2 – Espalhamento elétron-elétron para o modelo massivo original.



Fonte: Autoria própria.

Utilizando a corrente escrita em termos das soluções da equação de Dirac (linhas externas do diagrama na concha de massa), os diagramas da Figura 2 possuem a forma geral

$$F_O = -iJ^\mu(O_O^{-1})_{\mu\nu}J^\nu. \tag{264}$$

Por outro lado, a amplitude de espalhamento elétron-elétron para o modelo dual deve levar em conta, além dos diagramas do tipo (a), os diagramas do tipo (b), correspondentes à interação corrente-corrente existente em (249). Estes dois tipos de diagrama são mostrados na Figura 3. Em particular, o diagrama do tipo (a) corresponde aos dois diagramas da Figura 2, porém escritos com o propagador da teoria dual e a corrente modificada. O diagrama do tipo (b) também corresponde a dois diagramas com momentos trocados.

Assim, a amplitude de espalhamento correspondente à Figura 3 para o modelo dual é

$$F_D = -i\tilde{J}^\mu(O_D^{-1})_{\mu\nu}\tilde{J}^\nu - iJ^\mu\frac{L_{\mu\nu}}{\mu^2}J^\nu. \tag{265}$$

O primeiro termo da amplitude acima corresponde ao primeiro diagrama da Figura 3, enquanto que o segundo termo é introduzido pela interação corrente-corrente que corresponde ao segundo diagrama da Figura 3.

Usando a identidade $\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu}$ na equação (260), obtemos

$$(O_D^{-1})_{\mu\nu} = (O_O^{-1})_{\mu\nu} - (\tilde{O}^{-1})_{\mu\nu} - \omega_\mu{}^\sigma(O_O^{-1})_{\sigma\nu} \tag{266}$$

$$\rightarrow (O_O^{-1})_{\mu\nu} - (\tilde{O}^{-1})_{\mu\nu}, \tag{267}$$

Figura 3 – Contribuições para o espalhamento férmion-fermion para o modelo dual.

Fonte: Autoria própria.

em que o terceiro termo de (266) foi ignorado, uma vez que não contribuirá no cálculo da amplitude (265), dado que $\omega_{\mu\nu}J^{\nu} = 0$.

Substituindo a nova corrente apresentada em (261) e a representação do propagador dual (267) no primeiro termo da amplitude de espalhamento (265), temos

$$\begin{aligned} -i\tilde{J}\mathcal{O}_D^{-1}\tilde{J} &= -iJ\left(\eta - \frac{1}{\mu^2}L\mathcal{O}_O\right)\left(\mathcal{O}_O^{-1} - \tilde{\mathcal{O}}^{-1}\right)\left(\eta - \frac{1}{\mu^2}\mathcal{O}_O L\right)J, \\ &= -iJ\mathcal{O}_O^{-1}J + \frac{i}{\mu^2}JLJ + iJ\tilde{\mathcal{O}}^{-1}J - \frac{i}{\mu^2}J\tilde{\mathcal{O}}^{-1}\mathcal{O}_O LJ + \frac{i}{\mu^2}JLJ \\ &- \frac{i}{\mu^4}JL\mathcal{O}_O LJ - \frac{i}{\mu^2}JL\mathcal{O}_O\tilde{\mathcal{O}}^{-1}J + \frac{i}{\mu^4}JL\mathcal{O}_O\tilde{\mathcal{O}}^{-1}\mathcal{O}_O LJ. \end{aligned} \tag{268}$$

Iremos agora utilizar a equação (256) e a conversão para o espaço dos momentos, $\Box \longrightarrow -p^2$, nos dois últimos termos apresentados em (268). Após alguns cálculos, temos:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{\mu^2}JL\mathcal{O}_O\tilde{\mathcal{O}}^{-1}J &= -\frac{i}{\mu^2}JL\left[\tilde{\mathcal{O}} + \frac{p^2}{\tau} + \mu^2 M\right]\tilde{\mathcal{O}}^{-1}J, \\ &= -\frac{i}{\mu^2}J\left[L + \mu^2\tilde{\mathcal{O}}^{-1} + \frac{p^2}{\tau}L\omega\tilde{\mathcal{O}}^{-1}\right]J. \end{aligned} \tag{269}$$

$$\begin{aligned} \frac{i}{\mu^4}JL\mathcal{O}_O\tilde{\mathcal{O}}^{-1}\mathcal{O}_O LJ &= \frac{i}{\mu^4}JL\left[\tilde{\mathcal{O}} + \frac{p^2}{\tau}\omega + \mu^2 M\right]\tilde{\mathcal{O}}^{-1}\left[\tilde{\mathcal{O}} + \frac{p^2}{\tau}\omega + \mu^2 M\right]LJ, \\ &= \frac{i}{\mu^4}J\left[L\mathcal{O}_O L + \mu^2\tilde{\mathcal{O}}^{-1}\mathcal{O}_O L + \frac{p^2}{\tau}L\omega L + \frac{p^2}{\tau}\mu^2 L\omega\tilde{\mathcal{O}}^{-1}\right]J \\ &+ \frac{i}{\mu^4}J\left[\frac{p^4}{\tau^2}L\omega\tilde{\mathcal{O}}^{-1}\omega L\right]J. \end{aligned} \tag{270}$$

Utilizando a equação (258) no espaço dos momentos e as relações $\omega(\mathcal{O}_{Tr}^{-1}) = 0$ e $\omega^2 = \omega$ no último termo de (270), obtemos

$$\frac{p^4}{\tau^2}L\omega(\tilde{\mathcal{O}}^{-1})\omega L = -\frac{p^2}{\tau}L\omega L. \tag{271}$$

Substituindo (271) em (270), ficamos com

$$\frac{i}{\mu^4}JL\mathcal{O}_O\tilde{\mathcal{O}}^{-1}\mathcal{O}_O LJ = \frac{i}{\mu^4}J\left[L\mathcal{O}_O L + \mu^2\tilde{\mathcal{O}}^{-1}\mathcal{O}_O L + \frac{p^2}{\tau}\mu^2 L\omega\tilde{\mathcal{O}}^{-1}\right]J. \tag{272}$$

Finalizando, vamos substituir (269) e (272) em (268), chegando à igualdade

$$-i\tilde{J}_\mu(\mathcal{O}_D^{-1})^{\mu\nu}\tilde{J}_\nu = -iJ_\mu(\mathcal{O}_O^{-1})^{\mu\nu}J_\nu + \frac{i}{\mu^2}J_\mu L^{\mu\nu}J_\nu. \tag{273}$$

Voltando à equação (265) e substituindo o resultado (273), verificamos a equivalência com a equação (264). Ou seja,

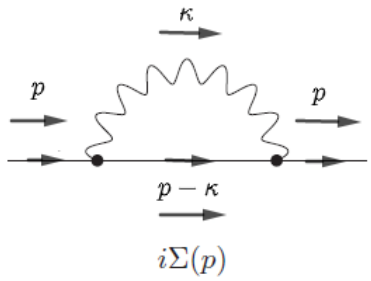
$$F_D = -i\tilde{J}^\mu(\mathcal{O}_D^{-1})_{\mu\nu}\tilde{J}^\nu - iJ^\mu\frac{L_{\mu\nu}}{\mu^2}J^\nu = -iJ_\mu(\mathcal{O}_O^{-1})^{\mu\nu}J_\nu + \frac{i}{\mu^2}J_\mu L^{\mu\nu}J_\nu - iJ^\mu\frac{L_{\mu\nu}}{\mu^2}J^\nu = F_O. \tag{274}$$

Note que o último termo em (273) cancela a contribuição do diagrama de quatro férmios da Figura 3-b que aparece na amplitude (265). Essa equivalência é válida para os dois tipos de diagrama da Figura 2.

6.5 Equivalência em Ordem de *Loops* Superiores

Nesta seção demonstraremos a equivalência *on-shell* para uma amplitude simples de um *loop* e, em seguida, mostraremos que a equivalência é válida *off-shell*. Iniciaremos considerando a auto-energia do elétron de uma eletrodinâmica massiva estentida e de seu modelo dual invariante de calibre correspondente. A auto-energia do férmion para a densidade Lagrangeana (243) está representada no diagrama da Figura 4,

Figura 4 – Diagrama de auto-energia para o férmion no modelo massivo original.



Fonte: Autoria própria.

que, de acordo com as regras de Feynman (KANNILE, 2013), é dada por

$$i\Sigma(p) = -q^2\int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\gamma^\mu(\not{p}-\not{k}+m)\gamma^\nu}{(p-k)^2-m^2}(\mathcal{O}_O^{-1})_{\mu\nu}(k). \tag{275}$$

Seguindo para a Figura 5, obtemos a auto-energia do férmion para a Lagrangeana dual (249), a qual recebe as contribuições dos diagramas (a) e (b),

$$i\tilde{\Sigma}(p) = i\tilde{\Sigma}_a(p) + i\tilde{\Sigma}_b(p), \tag{276}$$

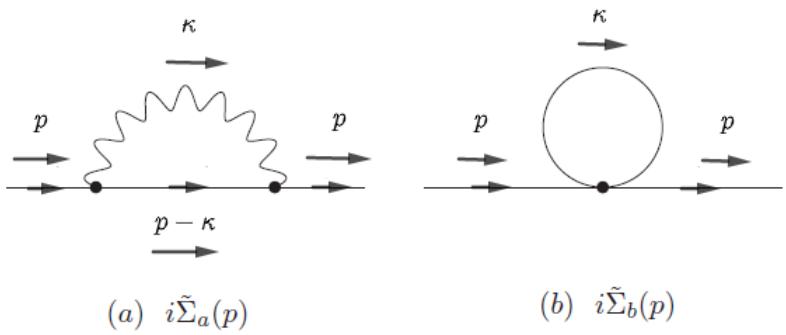
em que

$$i\tilde{\Sigma}_a(p) = -q^2 \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu \left(\eta - \frac{1}{\mu^2} L O_O\right)_{\mu\alpha} (\not{p} - \not{k} + m) \left(\eta - \frac{1}{\mu^2} O_O L\right)_{\beta\nu} \gamma^\nu}{(p-k)^2 - m^2} (O_D^{-1})^{\alpha\beta}(k) \tag{277}$$

e

$$i\tilde{\Sigma}_b(p) = \frac{q^2}{\mu^2} \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu L_{\mu\nu} \gamma^\nu (\not{k} + m)}{[k^2 - m^2]} = \frac{mq^2}{\mu^2} \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu L_{\mu\nu} \gamma^\nu}{[k^2 - m^2]}. \tag{278}$$

Figura 5 – Contribuições para a auto-energia de um laço do férmion no modelo dual.



Fonte: Autoria própria.

Observe que o operador O_O atua no campo vetorial e, portanto, depende apenas do momento κ^μ. Consideremos primeiro a amplitude (277). Temos que lidar com o produto dos operadores

$$\left(\eta - \frac{1}{\mu^2} L O_O\right)_{\mu\alpha} (O_D^{-1})^{\alpha\beta}(k) \left(\eta - \frac{1}{\mu^2} O_O L\right)_{\beta\nu}. \tag{279}$$

No cálculo em nível árvore da última Seção 6.4, desconsideramos o termo $\omega^{\alpha\beta}$ em (266) devido à conservação da corrente. Nesta parte iremos considerar este termo e mostrar como o cálculo *on-shell* fixa essa contribuição em zero. As possíveis partes não transversais dos vértices são proporcionais a $\omega^{\alpha\beta}$. Como $\omega^2 = \omega$, por ser um projetor, a contribuição devida ao termo desconsiderado, no numerador, envolve o fator

$$\gamma^\mu \omega_{\mu\nu} (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\nu = \frac{1}{k^2} \not{k} (\not{p} - \not{k} + m) \not{k}, \tag{280}$$

sendo proporcional a

$$I = \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}(\not{p} - \not{k} + m)\not{k}}{k^2[(p-k)^2 - m^2]}. \tag{281}$$

Para calcular I, utilizamos a método de Regularização Implícita (RI) descrita em (FELIPPE et al., 2022) e abordada no Apêndice A. Supondo que a integral seja regularizada, realizamos a

parametrização de Feynman, apresentada na Seção A.1, na qual apresentamos o desenvolvimento dos cálculos da integral

$$I = \int_0^1 dx \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(\not{k} + x\not{p})[(1-x)\not{p} - \not{k} + m](\not{k} + x\not{p})}{(k^2 + H^2)^2}, \tag{282}$$

em que $H^2 = p^2x(1-x) - m^2x$. Selecionando os termos pares no numerador e usando as condições *on-shell* $\bar{u}(p)\not{p} = \bar{u}(p)m$, $\not{p}u(p) = mu(p)$ e $p^2 = m^2$, obtemos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \left\{ -mx \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2+H^2)} + 2(1-x)p^\alpha \gamma^\beta \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\beta}{(k^2+H^2)^2} \right. \\ &+ \left. \left[mxH^2 + m^3x^2(2-x) \right] \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2+H^2)^2} \right\}. \end{aligned} \tag{283}$$

Usando a relação

$$\int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\beta}{(k^2+H^2)^2} = \frac{\eta_{\alpha\beta}}{2} I_{quad}(-H^2), \tag{284}$$

com o objetivo de eliminar os termos de superfície, que é uma condição para a invariância de calibre, e o resultado *on-shell* $H^2 = -m^2x^2$, obtemos

$$I = \int_0^1 dx \left\{ (1-2x)m I_{quad}(-H^2) + 2m^3x^2(1-x) I_{log}(-H^2) \right\}, \tag{285}$$

em que usamos as definições das divergências básicas da RI,

$$I_{log}(m^2) = \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2-m^2)^2} \quad \text{e} \quad I_{quad}(m^2) = \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2-m^2)}. \tag{286}$$

As seguintes relações de escala são usadas para que as divergências básicas fiquem livres do momento externo,

$$I_{log}(-H^2) = I_{log}(m^2) - \frac{i}{16\pi^2} \ln\left(-\frac{H^2}{m^2}\right) \tag{287}$$

e

$$I_{quad}(-H^2) = I_{quad}(m^2) - (m^2+H^2) I_{log}(m^2) - \frac{i}{16\pi^2} \left[m^2 + H^2 - H^2 \ln\left(-\frac{H^2}{m^2}\right) \right]. \tag{288}$$

Temos,

$$\begin{aligned} I &= I_{quad}(m^2) \int_0^1 dx\, m(1-2x) + I_{log}(m^2) \int_0^1 dx\, m^3(1-x)(4x^2+x-1) \\ &- \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx\, m^3 \left[(1-2x)(1-x^2) + x^2(3-4x)\ln x^2 \right] = 0. \end{aligned} \tag{289}$$

Isso mostra que, mesmo na presença de um vértice não transversal no modelo dual, este termo espúrio não contribui para os cálculos físicos. No entanto, como já foi indiretamente mostrado na Seção 6.4, temos

$$\left(\eta - \frac{1}{\mu^2} L O_O \right)^{\mu\nu} k_\nu = k^\mu - \frac{1}{\mu^2} \left[L(O + \mu^2 M) \right]^{\mu\nu} k_\nu = 0, \tag{290}$$

já que $\mathcal{O}$ é transversal e $M = L^{-1}$. Voltamos, então, nossa atenção para a equação (277). Dado que os vértices são transversais, seguimos exatamente os mesmos passos dos cálculos da equação (268) à equação (273), para obter

$$\left(\eta - \frac{1}{\mu^2} L\mathcal{O}_O\right)_{\mu\alpha} (\mathcal{O}_D^{-1})^{\alpha\beta}(k) \left(\eta - \frac{1}{\mu^2}\mathcal{O}_O L\right)_{\beta\nu} = \left(\mathcal{O}_O^{-1} + \frac{1}{\mu^2} L\right)_{\mu\nu} . \tag{291}$$

Como consequência, podemos escrever

$$i\tilde{\Sigma}_a(p) = -q^2 \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m)\gamma^\nu}{[(p-k)^2 - m^2]} (\mathcal{O}_O^{-1})_{\mu\nu} - \frac{q^2}{\mu^2} \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m)\gamma^\nu L_{\mu\nu}}{[(p-k)^2 - m^2]}. \tag{292}$$

O primeiro termo é (275) e, no segundo, fazemos a mudança $k \longrightarrow k + p$ e o descartamos do termo de superfície, conforme prescrito pela RI. A amplitude fica

$$\begin{aligned} i\tilde{\Sigma}_a(p) &= i\Sigma(p) - \frac{q^2}{\mu^2} \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu(-\not{k} + m)\gamma^\nu L_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)}, \\ &= i\Sigma(p) - \frac{mq^2}{\mu^2} \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu\gamma^\nu L_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)} = i\Sigma(p) - i\tilde{\Sigma}_b(p), \end{aligned} \tag{293}$$

temos,

$$i\tilde{\Sigma}(p) = i\tilde{\Sigma}_a(p) + i\tilde{\Sigma}_b(p) = i\Sigma(p) - i\tilde{\Sigma}_b + i\tilde{\Sigma}_b = i\Sigma(p), \tag{294}$$

o que mostra a equivalência dos cálculos a partir das densidades Lagrangeanas original e dualizada.

Salientamos que esse resultado ocorre para *off-shell*. É natural esperar que o resultado da equação (291) garanta que a equivalência entre os dois modelos inter-relacionados através do processo de dualização pode ser estendido a todas as ordens de *loops*. Isso ocorre porque a cada diagrama em árvore do tipo mostrado na Figura 2, referente ao modelo massivo original, que compõe uma amplitude, corresponderá um par de diagramas dos tipos mostrados na Figura 3 (a) e (b), referente ao modelo dual invariante de calibre. Como resultado disso, esperamos que seja possível construir uma prova diagramática da equivalência de todas as ordens de *loops* entre os modelos interligados por dualização.

7 Conclusão

Conforme discutido na Introdução, o fio condutor deste trabalho foi contextualizado no âmbito geral das extensões da Eletrodinâmica Quântica (QED) que incluem termos de massa, seja por meio de teorias com violação da simetria de Lorentz ou não. Em uma das frentes, estudamos o interessante caso que envolve um tensor de massa não inversível, o que sugere uma invariância de calibre residual. Além disso, investigamos relações de dualidades de modelos que violam simetria de calibre por meio de um termo de massa com outros que respeitam esta simetria.

Estudamos uma eletrodinâmica alternativa CPT-ímpar que incorpora um termo geral de massa que viola a simetria Lorentz que, na verdade, é uma versão estendida daquela obtida a partir de um procedimento semelhante ao de Palatini em (FELIPE et al., 2019). Mostramos que, a parte do tensor de massa que viola a simetria Lorentz afeta apenas um dos três modos de propagação do campo de calibre. O parâmetro ρ que controla esta parte do tensor de massa desempenha um papel fundamental na preservação das propriedades físicas essenciais do modelo. Mostramos que quando $\rho = 1$, o campo vetorial apresenta um modo de propagação sem massa ao longo do eixo z. Este fato, juntamente com a falta de um inverso para o tensor de massa, nos levou a investigar a presença de uma invariância de calibre residual no modelo. Enfim, mostramos a consistência física do modelo por meio de suas equações de campo clássicas e da análise dos polos do propagador do campo vetorial. Com esses resultados, elaboramos um artigo, que foi publicado na revista *Advances in High Energy Physics* (MARQUES et al., 2022b).

Tratamos, também, o método de imersão em calibre (método de dualização de Noether) para um modelo que viola a simetria de calibre. A técnica pode ser aplicada em um espaço-tempo de dimensão arbitrária, em modelos que podem incluir derivadas superiores ou não, ser invariante de Lorentz ou não. A metodologia, como sempre, implica o surgimento de um novo modelo invariante de calibre para o campo vetorial. Obtivemos, a partir da relação entre os propagadores destes modelos, a confirmação de que eles apresentam modos de propagação comuns, descrevendo, portanto, as mesmas partículas.

Em seguida, de uma forma mais geral, mostramos a equivalência física dos modelos duais em níveis clássico e quântico. Em nível clássico, a equivalância foi demonstrada por meio do cálculo da seção de choque do espalhamento elétron-elétron (espalhamento Møller) em nível árvore. No caso da equivalência quântica, partimos da equivalência *on-shell* para uma amplitude simples de um *loop* e, em seguida, mostramos que a equivalência é válida também *off-shell*. Além disso, pode-se esperar que tal equivalência ocorra naturalmente para correções de *loops* em qualquer ordem. Motivados com os resultados apresentados, publicamos outro artigo na revista *European Physical Journal C* (MARQUES et al., 2022a).

Para trabalhos futuros seria interessante investigar como funcionaria um processo de dualização no limite $\rho \longrightarrow 1$. Em outras palavras, valeria a pena entender que tipo de modelo surge neste limite em um modelo invariante de calibre mais geral com ρ indeterminado, obtido

a partir de um procedimento de imersão em calibre. Esperamos, também, que seja possível construir uma prova diagramática da equivalência em ordens superiores de *loops* entre os modelos interligados por dualização e procurar dualidades em *loops* superiores.

Referências

ALTSCHUL, B. Radiatively induced Lorentz-violating photon masses. **Physical Review D**, APS, v. 73, n. 3, p. 12, feb 2006. Citado na página 42.

ALTSCHUL, B. Vacuum cerenkov radiation in Lorentz-violating theories. **Physical Review Letters**, APS, v. 98, n. 4, p. 9, jan 2007. Citado na página 42.

ALTSCHUL, B. Lorentz violation and the Higgs mechanism. **Physical Review D**, APS, v. 86, n. 4, p. 15, aug 2012. Citado na página 42.

ANACLETO, M. et al. Dual equivalence between self-dual and Maxwell–Chern–Simons models coupled to dynamical u(1) charged matter. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 504, n. 3, p. 5, apr 2001. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 47.

BATTISTEL, O. A.; MOTA, A. L.; NEMES, M. C. Consistency conditions for 4-d regularizations. **Modern Physics Letters A**, World Scientific, v. 13, n. 20, p. 14, jun 1998. Citado na página 82.

BERGHOFER, P. et al. **Gauge symmetries, symmetry Breaking, and Gauge-invariant approaches**. p. 13, out. 2021. Citado na página 33.

CAMARGO, G. F. **Espalhamento fóton-fóton**: ambiguidades e seção de choque. Dissertação - Mestrado em Física. Universidade Federal de Minas Gerais, 2013. Citado na página 82.

CAMBIASO, M.; LEHNERT, R.; POTTING, R. Massive photons and Lorentz violation. **Physical Review D**, APS, v. 85, n. 8, p. 12, apr 2012. Citado na página 42.

CANTCHEFF, M. B. et al. Dual embedding of the Lorentz-violating electrodynamics and Batalin-Vilkovisky quantization. **Physical Review D**, APS, v. 68, n. 6, p. 7, sep 2003. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 47.

CARROLL, S. M.; FIELD, G. B.; JACKIW, R. Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics. **Physical Review D**, APS, v. 41, n. 4, p. 10, feb 1990. Citado 3 vezes nas páginas 15, 17 e 41.

CASANA, R.; FERREIRA, M. M.; MOREIRA, R. P. M. Consistency analysis of a nonbirefringent Lorentz-violating planar model. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 72, n. 7, jul 2012. Citado na página 57.

CASANA, R. et al. Feynman propagator for the nonbirefringent cpt-even electrodynamics of the standard model extension. **Physical Review D**, APS, v. 82, n. 12, p. 24, dec 2010. Citado na página 42.

COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. violation and the standard model. **Physical Review D**, APS, v. 55, n. 11, p. 38, jun 1997. Citado 3 vezes nas páginas 15, 41 e 51.

COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz-violating extension of the standard model. **Physical Review D**, APS, v. 58, n. 11, p. 25, oct 1998. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 41.

DALMAZI, D. Ghost free dual vector theories in (2+1) dimensions. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2006, n. 01, p. 15, jan 2006. Citado na página 16.

DESER, S.; JACKIW, R. “Self-duality” of topologically massive gauge theories. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 139, n. 5-6, p. 7, may 1984. Citado 4 vezes nas páginas 16, 43, 48 e 50.

DIAS, E. W. **Generalização do procedimento de regularização implícita para ordens superiores em teorias de calibre abelianas**. Tese - Doutorado em Ciências. Universidade Federal de Minas Gerais, 2008. Citado na página 83.

DVALI, G.; PAPUCCI, M.; SCHWARTZ, M. D. Infrared Lorentz violation and slowly instantaneous electricity. **Physical Review Letters**, APS, v. 94, n. 19, p. 4, may 2005. Citado na página 42.

FARGNOLI, H. et al. Dual embedding of extended models with a Lorentz-breaking mass term. **Physical Review D**, APS, v. 90, n. 8, p. 16, oct 2014. Citado 5 vezes nas páginas 16, 17, 41, 42 e 47.

FELIPE, J. C. C. et al. Consistency of an alternative CPT-odd and Lorentz-violating extension of QED. **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific, v. 34, n. 25, p. 16, sep 2019. Citado 6 vezes nas páginas 15, 16, 17, 51, 54 e 72.

FELIPPE, B. Z. et al. Advances towards the systematization of calculations with implicit regularization. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 82, n. 7, p. 25, jul 2022. Citado na página 69.

FERRARA, S. et al. Scalar multiplet coupled to supergravity. **Physical Review D**, APS, v. 15, n. 4, p. 20, feb 1977. Citado na página 47.

FERRARI, A. et al. Duality of three-dimensional superfield theories. **Physical Review D**, APS, v. 73, n. 10, p. 18, 2006. Citado na página 47.

FREEDMAN, D. Z.; JOHNSON, K.; LATORRE, J. Differential regularization and renormalization: A new method of calculation in quantum field theory. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 371, n. 1-2, p. 62, may 1992. Citado na página 82.

FREEDMAN, D. Z.; NIEUWENHUIZEN, P. van; FERRARA, S. Progress toward a theory of supergravity. **Physical Review D**, APS, v. 13, n. 12, p. 13, jun 1976. Citado na página 47.

GABADADZE, G.; GRISA, L. Lorentz-violating massive gauge and gravitational fields. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 617, n. 1-2, p. 14, jun 2005. Citado na página 42.

GOMES, M.; MALACARNE, L.; SILVA, A. da. On the equivalence of the self-dual and Maxwell-Chern-Simons models coupled to fermions. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 439, n. 1-2, p. 8, oct 1998. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 46.

GREINER, W.; MÜLLER, B. **Theoretical physics text and exercise books**. Springer, p. 368, 1993. Citado na página 37.

GUIMARAES, M. et al. On the duality in four-dimensional lorentz-breaking field theories. **Europhysics Letters**, IOP Publishing, v. 95, n. 5, p. 16, 2011. Citado na página 45.

HJELMELAND, S. E.; LINDSTRöM, U. Duality for the non-specialist. **Abstract Service**, v. 2, n. 1, p. 46, may 1997. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 43.

JACKSON, J. D.; OKUN, L. B. Historical roots of gauge invariance. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 73, n. 3, p. 35, sep 2001. Citado na página 37.

KANNILE, K. Notes on Feynman parametrisation and the Dirac delta function. **Online**, v. 1, n. 1, p. 3, may 2013. Citado na página 68.

KOSTELECKÝ, V. A.; RUSSELL, N.; TSO, R. Bipartite Riemann–Finsler geometry and lorentz violation. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 716, n. 3-5, p. 5, oct 2012. Citado na página 41.

KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Gravitational phenomenology in higher-dimensional theories and strings. **Physical Review D**, APS, v. 40, n. 6, p. 54, sep 1989. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 17.

KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory. **Physical Review D**, APS, v. 39, n. 2, p. 8, jan 1989. Citado na página 15.

LEE, B. W.; ZINN-JUSTIN, J. Spontaneously broken gauge symmetries. IV. general gauge formulation. **Physical Review D**, APS, v. 7, n. 4, p. 8, feb 1973. Citado na página 38.

LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica**. Livraria da Física, p. 388, 2004. Citado na página 19.

MARIZ, T.; NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. **Lorentz symmetry breaking–classical and quantum aspects**. Springer, p. 122, may 2022. Citado na página 42.

MARQUES, B. A. et al. Gauge embedding procedure: classical and quantum equivalence between dual models. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 1, n. 3, p. 8, mar 2022. Citado 4 vezes nas páginas 17, 18, 60 e 72.

MARQUES, B. A. et al. Residual gauge invariance in a massive Lorentz-violating extension of QED. **Advances in High Energy Physics**, Hindawi Limited, v. 1, n. 1, p. 9, feb 2022. Citado 3 vezes nas páginas 17, 51 e 72.

MCMAHON, D. **Quantum Field Theory Demystified**. McGraw-Hill Professional, p. 320, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 39.

PEREZ-VICTORIA, M. Physical (ir) relevance of ambiguities to Lorentz and cpt violation in qed. **Journal of High Energy Physics**, IOP Publishing, v. 1, n. 04, p. 032, feb 2001. Citado na página 42.

POLCHINSKI, J. Dualities of fields and strings. **Studies in History and Philosophy of Modern Physics**, Elsevier, v. 59, n. 2, p. 45, aug 2017. Citado na página 43.

RILEY, K. F. **Mathematical methods for physics and engineering**. Cambridge University Press, p. 1333, 2006. Citado na página 58.

ROBLES, P.; CLARO, F. Can there be massive photons? a pedagogical glance at the origin of mass. **European Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 33, n. 5, p. 1217, jul 2012. Citado na página 15.

RYDER, L. H. **Quantum field theory**. Cambridge University Press, p. 487, 1996. Citado na página 33.

SCARPELLI, A. P. B.; CANTCHEFF, M. B.; HELAYëL-NETO, J. A. A comment on the relation between the propagators of dual theories. **Europhysics Letters (EPL)**, IOP Publishing, v. 65, n. 6, p. 6, mar 2004. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 64.

SCARPELLI, A. P. B. et al. On the duality in CPT-even Lorentz-breaking theories. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 75, n. 7, p. 14, jul 2015. Citado na página 16.

SCARPELLI, A. P. B. et al. Chiral anomaly and cpt invariance in an implicit momentum space regularization framework. **Physical Review D**, APS, v. 64, n. 4, p. 16, jul 2001. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 82.

SPAVIERI, G. et al. A survey of existing and proposed classical and quantum approaches to the photon mass. **The European Physical Journal D**, Springer, v. 61, n. 3, p. 20, feb 2011. Citado na página 15.

STUECKELBERG, E.C.G. Die Wechselwirkungskräfte in der elektrodynamik und in der feld theorie der Kernkräfte. teil i. **Birkhäuser**, v. 11, n. 4, p. 31, januar 1938. Citado na página 41.

THOMSON, M. **Modern Particle Physics**. Cambridge University Press, p. 546, sep 2013. Citado na página 66.

TONIOLO, G. R. et al. Tree-level equivalence between a Lorentz-violating extension of QED and its dual model in electron–electron scattering. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 77, n. 2, p. 8, feb 2017. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 47.

Apêndices

APÊNDICE A – Desenvolvimento da Integral de Feynman

Neste apêndice, damos detalhes do cálculo da integral de Feynman que foi necessária à demonstração de equivalência dos modelos duais na Seção 6.5.

A.1 Parametrização de Feynman

A parametrização de Feynman é um procedimento que facilita o cálculo das integrais de Feynman. Este método se baseia na equivalência

$$\frac{1}{b_1 b_2 ... b_n} = (n-1)! \int dx_1 \int dx_2 ... \int dx_n \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i)}{(b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_n x_n)^n} \tag{295}$$

em que δ é o delta de Dirac, os x_i são os parâmetos de Feynman, e os b_i geralmente são propagadores de partículas correspondentes às linhas internas do diagrama abordado, ao qual está associada a integral que se deseja calcular. Estes b_i normalmente envolvem massas, por serem monômios quadráticos dos momentos internos e externos.

Tendo pelo menos dois fatores b_i iguais, derivamos a expressão (295) em ambos os lados, em relação a um dos b_i para resultar na expressão adequada. Por exemplo, obtém-se

$$\frac{1}{b_1^2 b_2 ... b_n} = n! \int dx_1 \int dx_2 ... \int dx_n \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i) x_1}{(b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_n x_n)^{n+1}}. \tag{296}$$

Vejamos alguns exemplos importantes:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[(b-a)x + a]^2} \tag{297}$$

$$\frac{1}{a^2 b} = 2 \int_0^1 \frac{dx\,(1-x)}{[(b-a)x + a]^3} \tag{298}$$

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{dy}{[(c-a)z + (b-a)y + a]^3} \tag{299}$$

Observe que, após a parametrização de Feynman, existe uma forma genérica para o denominador, dada por

$$[k^2 + B(pk) + C]^\alpha \tag{300}$$

facilitando a integração em k.

A.2 Desenvolvimento da Integral

Partimos, então, da integral (281),

$$I = \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}(\not{p} - \not{k} + m)\not{k}}{k^2[(p-k)^2 - m^2]}, \tag{301}$$

que tem a forma da integral (297). Neste caso, analisamos o denominador, para o qual teremos

$$\begin{aligned} a &= (p-k)^2 - m^2 = p^2 - 2kp + k^2 - m^2 \\ b &= k^2 \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned} (a-b)x + b &= (p^2 - 2kp + k^2 - m^2 - k^2)x + k^2 \\ &= p^2x - 2kpx - m^2x + k^2 + p^2x^2 - p^2x^2 \\ &= (k - px)^2 + p^2x(1-x) - m^2x \\ &= k^2 + H^2, \end{aligned}$$

em que $k \longrightarrow k + px$ e $H = p^2x(1-x) - m^2x$. Desta forma, chegamos ao resultado

$$I = \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}(\not{p} - \not{k} + m)\not{k}}{k^2[(p-k)^2 - m^2]} = \int_0^1 \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(\not{k} + \not{p}x)[(1-x)\not{p} - \not{k} + m](\not{k} + \not{p}x)}{(k^2 + H^2)^2}.$$

Anexos

ANEXO A – Regularização Implícita

A Regularização Implicíta (RI) é um procedimento a ser utilizado no espaço dos momentos, desenvolvido com o objetivo de desagregar a parte divergente das integrais de Feynman, eliminando a necessidade de se calcular explicitamente tais divergências (SCARPELLI et al., 2001). Para melhor entendimento, a seguir apresentamos as propriedades essenciais da técnica :

1. funciona diretamente na dimensão física do modelo;
2. preserva simetrias de maneira automática, para teorias sem conteúdo anômalo;
3. trata as anomalias de maneira adequada;
4. é aplicável a teorias não-massivas originalmente livres de divergências infravermelhas de maneira segura, mantendo a teoria livre de tais divergências;
5. não introduz novas estruturas na Lagrangeana da teoria;
6. não é complicada do ponto de vista do cálculo das integrais de Feynman.

Há algum tempo, um procedimento no espaço dos momentos que compartilha algumas das características da Regularização Diferencial (FREEDMAN; JOHNSON; LATORRE, 1992) (que é executada com as amplitudes escritas como distribuições no espaço das configurações) foi proposto, tendo sido usado com grande sucesso em muitas teorias. Tal procedimento, batizado de Regularização Implícita (RI) (BATTISTEL; MOTA; NEMES, 1998), opera no espaço dos momentos e na dimensão física da teoria.

A RI pode ser formulada por meio de um conjunto de regras. A ideia básica do procedimento de Regularização Implícita de uma integral de Feynman é assumir, antes de manipular os integrandos, a presença implícita de algum esquema ou função genérica reguladora $\rho(k^2,\Lambda)$, que permite a manipulação algébrica dos integrandos com o objetivo de separar sua parte dependente de regularização da parte finita (CAMARGO, 2013.):

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k) \to \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k)\rho(k^2,\Lambda) \equiv \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k), \tag{302}$$

em que o índice Λ nas integrais é para indicar que elas estão regularizadas. Importante destacar que a função reguladora deve definir uma integral absolutamente convergente, ou seja

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left| f(k)\rho(k^2,\Lambda) \right| < \infty, \tag{303}$$

Primeiramente, supomos que uma regularização é aplicada à amplitude completa, de modo que as manipulações algébricas podem ser realizadas no integrando. Em seguida, realizamos a álgebra do grupo de simetrias e escrevemos a amplitude no espaço dos momentos como uma combinação de integrais básicas, multiplicadas por polinômios no momento externo e objetos típicos do grupo de simetrias. Damos, abaixo, exemplos de integrais básicas:

$$\begin{aligned} I &= \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]}, \\ I_\mu &= \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]}, \\ I_{\mu\nu} &= \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]}. \end{aligned} \tag{304}$$

Cada uma dessas integrais básicas pode ser tratada de acordo com um conjunto de regras. Assim, uma tabela com seus resultados pode ser usada sempre que um novo cálculo está sendo executado. As regras de Regularização Implícita Restrita para cálculos na ordem de 1-*loop* podem ser assim listadas:

1. uma amplitude é considerada regularizada com uma técnica que é mantida implícita e que tem as propriedades de não modificar nem o integrando nem a dimensão do espaço-tempo. A primeira propriedade é para preservar a parte finita e a segunda é um requisito para não violar supersimetria;

2. para obter a parte divergente de uma integral básica, aplicamos recursivamente a identidade,

$$\frac{1}{(p-k)^2-m^2} = \frac{1}{(k^2-m^2)} - \frac{p^2-2p\cdot k}{(k^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]}, \tag{305}$$

   até que a parte divergente não apresente o momento externo p no denominador. Isso vai garantir contratermos locais. Os integrandos das partes divergentes são escritos somente em termos do momento interno nos *loops*, de forma que essas integrais não precisam ser avaliadas. A independência das integrais divergentes do momento externo é uma característica altamente desejável, já que necessitamos de contratermos locais na Lagrangeana do modelo, para fins de renormalização. Além disso, essas integrais divergentes podem ser escritas como uma função de um parâmetro de massa arbitrário que caracteriza a liberdade de separação da parte divergente de uma amplitude e desempenha o papel de escala na equação do grupo de renormalização (DIAS, 2008). As integrais divergentes restantes têm a forma

$$\int_k^{\Lambda} \frac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}\cdots}{(k^2-m^2)^\alpha}, \tag{306}$$

   em que usamos $\int_k$ como uma notação simplificada de $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$;

3. as integrais divergentes com índices de Lorentz devem ser expressas em termos de integrais escalares divergentes e termos de superfície. Por exemplo:

$$\int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^3} = \frac{1}{4}\left\{\eta_{\mu\nu}\int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2-m^2)^2} - \int_k^\Lambda \frac{\partial}{\partial k^\nu}\left[\frac{k_\mu}{(k^2-m^2)^2}\right]\right\}. \tag{307}$$

   A RI é, por construção, um procedimento que preserva simetrias. É bem conhecido que os termos que possivelmente quebram as simetrias são os chamados termos de superfície, que são facilmente identificados como diferenças entre divergências básicas de mesmo grau de divergência. Essas diferenças são finitas, mas dependentes de regularização. Elas podem ser parametrizadas por constantes a serem ajustadas. Pode-se lidar com os termos de superfície por meio da adição de contratermos locais à Lagrangeana, de tal forma que as identidades de Slavnov-Taylor sejam satisfeitas. No entanto, um procedimento que automaticamente as satisfaça é desejável. Termos de superfície não nulos implicam que a amplitude depende da escolha de roteamento do momento. Na prática, defini-los como zero desde o início é equivalente a cancelar esses termos de superfície por meio de contratermos de restauração da simetria local;

4. finalmente, a parte divergente das integrais é escrita como uma combinação das divergências básicas

$$I_{\log}\left(m^2\right) = \int_k^\Lambda \frac{1}{\left(k^2-m^2\right)^2} \quad \text{e} \quad I_{\text{quad}}\left(m^2\right) = \int_k^\Lambda \frac{1}{\left(k^2-m^2\right)}, \tag{308}$$

   o que exigirá contratermos locais no processo de renormalização.