SEQUÊNCIA NUMÉRICA

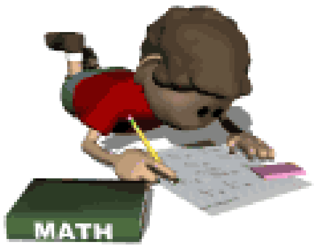
Denominamos sequência numérica o conjunto de números reais dispostos em certa ordem.

EXEMPLOS:

O conjunto ordenado (0, 2, 4, 6, 8, 10,...) é a sequência de números pares;

O conjunto ordenado (7, 9, 11, 13,15) é a sequência de números impares maiores do que 7 e menores do que 15.

SEQUÊNCIA NUMÉRICA



Matematicamente quando temos uma sequência numérica qualquer, representamos o seu 1º termo por a1, o 2º termo por a2 e assim sucessivamente, sendo o n-ésimo termo an.

EXEMPLOS:

(2, 4, 6, 8, 10) temos:

a1 = 2; a2 = 4; a3 = 6, e assim por diante...

EXEMPLOS DE SEQUÊNCIA

Sequência de meses: janeiro, fevereiro, março, abril, ..., dezembro.

Sequência de anos das 5 primeiras copas do mundo do século XXI: 2002, 2006, 2010, 2014, 2018

Classificação da sequência numérica de acordo com a quantidade de elementos

Sequência numérica finita

- A sequência é finita se ela possui uma quantidade limitada de elementos.
- Exemplos:

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)

(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)

(-4, -6, -8, -10, -12)

Classificação da sequência numérica de acordo com a quantidade de elementos

Sequência numérica infinita

A sequência é infinita se ela possui uma quantidade ilimitada de elementos.

Exemplos:

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...)

(3, 0, -3, -6, -9, -12, ...)

(-1, 2, -4, 8, -16, ...)

Classificação da sequência numérica de acordo com o comportamento da sequência

Sequência numérica crescente

A sequência é crescente se um termo for sempre maior que o seu antecessor.

Exemplos:

(1, 5, 9, 13, 17, ...)

(10, 11, 12, 13, 14, 15, ...)

Classificação da sequência numérica de acordo com o comportamento da sequência

Sequência numérica decrescente

A sequência é decrescente se os termos da sequência sempre são menores que os seus antecessores.

Exemplos:

(-1, -2, -3, -4, -5, ...)

(19, 16, 13, 10, 8, ...)

Classificação da sequência numérica de acordo com o comportamento da sequência

Sequência numérica constante

A sequência é constante quando todos os termos possuem o mesmo valor.

Exemplos:

(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...)

(-1, -1, -1, -1, -1, ...)

Classificação da sequência numérica de acordo com o comportamento da sequência

Sequência numérica oscilante

A sequência é oscilante se houver termos maiores que os seus antecessores e
termos menores que seus antecessores de forma alternada.

Exemplos:

(1, -3, 9, -27, 81, ...)

(1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, ...)

LEI DE FORMAÇÃO

- Em alguns casos, é possível descrever a sequência por meio de uma fórmula, porém isso nem sempre é possível. Por exemplo, a sequência dos números primos é uma sequência bem definida, entretanto não conseguimos descrevê-la por meio de uma fórmula. Conhecendo a fórmula, conseguimos construir a lei de ocorrência da sequência numérica.

Exemplo 1:

- Sequência dos números pares maiores que zero.

$a_n = 2n$

$a_1 = 2 . 1 = 2$

$a_2 = 2 . 2 = 4$

$a_3 = 2 . 3 = 6$

$a_n = 2 . n = ...$

$(2, 4, 6, ...)$

Exemplo 2:

- Sequência dos números naturais maiores que 4.

$a_n = 4 + n$

$a_1 = 4 + 1 = 5$

$a_2 = 4 + 2 = 6$

$a_3 = 4 + 3 = 7$

$a_n = 4 + n = \ldots$

(5, 6, 7, ...)

Generalização

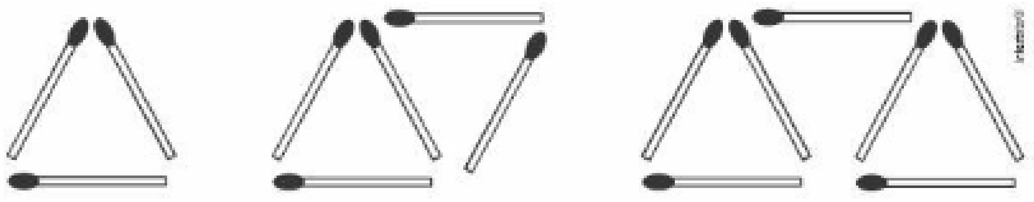
As sequências relacionam um número real a uma posição representada por um número natural diferente de zero.

Exemplo:

3, 8, 13, 18, 23, 28, ...

Exercício 1

Observe as representações de figuras formadas por palitos:



Encontre a lei de formação que representa a quantidade total de palitos em cada figura e responda:

Quantos palitos são necessários para formar 20 triângulos?

Exercício 2

O termo geral da sequência (4, 12, 36, ...) é:

a) $4 + (n-1)^3$
b) $4 + (3n-1)$
c) $4 + 3^n$
d) $4/3 \cdot 3^n$

Exercício 3

Uma sequência numérica possui lei de formação igual a: **$a_n = n^2+1$**. Analisando essa sequência, podemos afirmar que o valor do 5º termo da sequência será:

Exercício 4

Escreva os cinco primeiros termos de cada sequência (supondo que n começa em 1).

a) $a_n = (-3)^{n-1}$

b) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

c) $a_n = (-1)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)$

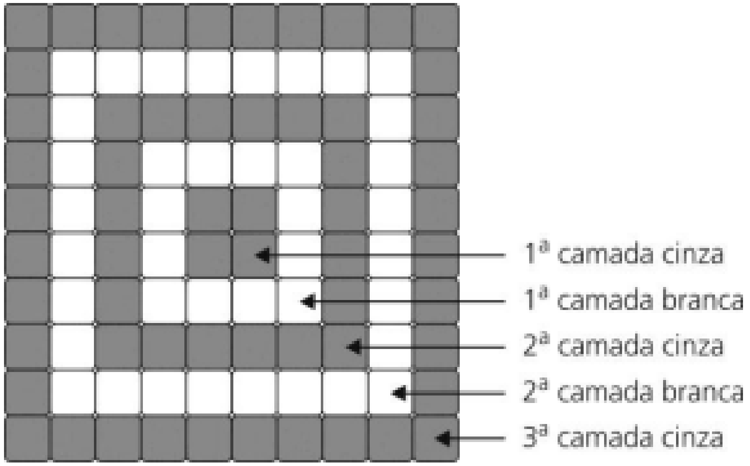
d) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

e) $a_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi(n-1)$

f) $a_n = \frac{n^2+n}{2}$

Exercício 5

No centro de um mosaico formado apenas por pequenos ladrilhos, um artista colocou 4 ladrilhos cinza. Em torno dos ladrilhos centrais, o artista colocou uma camada de ladrilhos brancos, seguida por uma camada de ladrilhos cinza, e assim sucessivamente, alternando camadas de ladrilhos brancos e cinza, como ilustra a figura abaixo, que mostra apenas a parte central do mosaico. Determine o número de ladrilhos da 10ª camada cinza.



Exercício 6

Um site de relacionamento tem 2200 membros e planeja aumentar o número de integrantes usando uma estratégia agressiva de propaganda. O site espera que 100 novos membros entrem na primeira semana após a propaganda, 200 entrem na segunda semana, 300 entrem na terceira semana, etc. Caso essa estratégia dê certo, determine em quantas semanas o site terá 10000 membros.

Exercício 7

Uma empresa está contratando funcionários da área de informática, pagando um salário inicial de R$ 40.000,00 por ano (incluindo os pagamentos mensais, o décimo terceiro salário e o adicional de férias). Além disso, a empresa prometeu aumentar em 3% o salário de seus funcionários a cada ano de trabalho.

a) Determine o salário anual do funcionário em cada um dos seus primeiros três anos na empresa.

b) Escreva a fórmula do termo geral da progressão que fornece o salário anual que o funcionário receberá no seu n-ésimo ano na empresa.

c) Determine o montante total que o funcionário receberá nos primeiros 10 anos de trabalho.

Progressão Aritmética

- Uma **progressão aritmética** é uma sequência numérica onde qualquer termo, a partir do segundo, pode ser obtido pela soma do termo imediatamente anterior com um valor constante denominado razão da P.A.
- A diferença entre dois termos consecutivos é constante e igual à razão da P.A., ou seja:

$$a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_n - a_{n-1} = r$$

Progressão Aritmética

Exemplos:

a) (1, 3, 5, 7) P.A. finita, onde $a_1 = 1$, $n = 4$ e $r = ?$

$r = 3 - 1 = 5 – 3 = 7 – 5 = 2$

b) (- 3, - 7, - 11,...) P.A. infinita, onde $a_1 = -3$ e $r = ?$

$r = -7 – (-3) = -11 – (-7) = -4$

Progressão Aritmética

Classificação da razão

1) Se **r > 0**, então a P.A. é crescente;

2) Se **r = 0** , então a P.A. é constante;

3) Se **r < 0**, então a P.A. é decrescente.

Progressão Aritmética

Média aritmética

1) Em qualquer P.A., cada termo, exceto os extremos, é a média aritmética entre o precedente e o consequente.

$$\boxed{a_k = \frac{(a_{k-1} + a_{k+1})}{2}}$$

Testando os Conhecimentos

1. Verifique se a sequência (6, 13, 20, 27, 34) é uma P.A.

2. Diga se a sequência ($x – 4y$, $x – 2y$, x, $x + 2y$), em que x e y são números reais, é ou não uma PA. Se for, determine a razão.

3. A sequência (2, 7/3, ...) é uma PA infinita. Determine o 3º termo dessa PA.

Testando os Conhecimentos

4. Determine os quatro primeiros elementos de uma sequência tal que an= 10n + 1.

5. Calcular a média aritmética dos termos, a partir do segundo termo (1,3,5,7).

Progressão Aritmética

FÓRMULA DO TERMO GERAL DE UMA PA

Numa P.A. de razão **r** e primeiro termo a_1 , podemos obter um termo qualquer a_n ,através da seguinte relação:

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

Progressão Aritmética

FÓRMULA DA SOMA DOS TERMOS DE UMA PA

Consideremos a PA (a_1, a_2, a_3,..., a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) e vamos indicar por S_n a soma de seus termos.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Progressão Aritmética

O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33 000 passagens; em fevereiro, 34 500; em março, 36 000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

A) 38 000.

B) 40 500.

C) 43 400.

D) 42 000.

E) 48 000.

Progressão Aritmética

Usando-se um conta-gotas, um produto químico é misturado a uma quantidade de água da seguinte forma: a mistura é feita em intervalos regulares, sendo que no primeiro intervalo são colocadas 4 gotas e nos intervalos seguintes são colocadas 4 gotas mais a quantidade misturada no intervalo anterior. Sabendo-se que no último intervalo o número de gotas é 100, o total de gotas do produto misturadas à água é:

a) 1300

b) 1100

c) 1600

d) 900

e) 1200

Progressão Aritmética

Leia com atenção a história em quadrinhos.

("O Globo", 16/03/2001.)

Considere que o leão da história acima tenha repetido o convite por várias semanas. Na primeira, convidou a Lana para sair 19 vezes; na segunda semana, convidou 23 vezes; na terceira, 27 vezes e assim sucessivamente, sempre aumentando em 4 unidades o número de convites feitos na semana anterior. Imediatamente após ter sido feito o último dos 492 convites, o número de semanas já decorridas desde o primeiro convite era igual a:

a) 10
b) 12
c) 14
d) 16

Progressão Aritmética

Uma empresa deve instalar telefones de emergência a cada 42 quilômetros, ao longo da rodovia de 2.184 km, que liga Maceió ao Rio de Janeiro. Considere que o primeiro desses telefones é instalado no quilômetro 42 e o último, no quilômetro 2.142. Assim, a quantidade de telefones instalados é igual a:

a)50
b) 51
c) 52
d) 53
e) 54

Progressão Aritmética

O diretório acadêmico de uma Universidade organizou palestras de esclarecimento sobre o plano de governo dos candidatos a governador. O anfiteatro, onde foram realizados os encontros, possuía 12 filas de poltronas distribuídas da seguinte forma: na primeira fila 21 poltronas, na segunda 25, na terceira 29, e assim sucessivamente. Sabendo que, num determinado dia, todas as poltronas foram ocupadas e que 42 pessoas ficaram em pé, o total de participantes, excluído o palestrante, foi de:

(A) 474

(B) 516

(C) 557

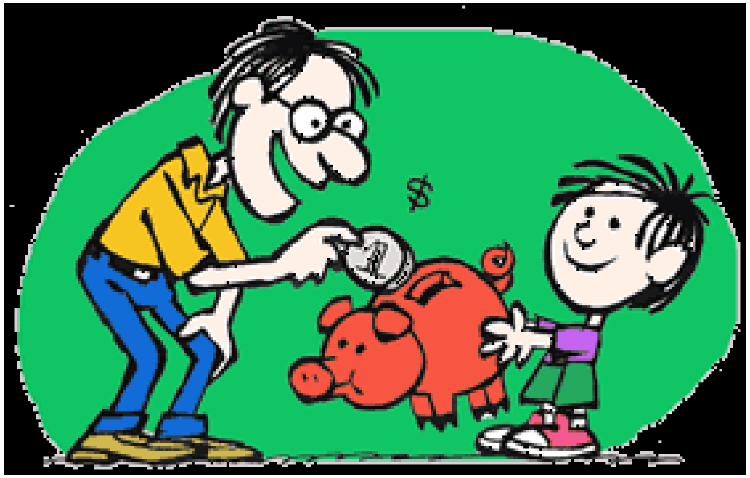
(D) 558

(E) 559

Progressão Aritmética

Um pai resolve depositar todos os meses uma certa quantia na caderneta de poupança de seu filho. Pretende começar com R$5,00 e aumentar R$5,00 por mês, ou seja, depositar R$10,00 no segundo mês, R$15,00 no terceiro mês e assim por diante. Após efetuar o décimo quinto depósito, a quantia total depositada por ele será de

a) R$150,00
b) R$250,00
c) R$400,00
d) R$520,00
e) R$600,00



Progressão Geométrica

- Uma sequência de números reais não nulos é chamado de **progressão geométrica** (PG) quando cada um de seus termos, a partir do segundo, é igual ao produto do anterior por uma constante **q**, chamada *razão* da PG.
- Para obter a **razão**, basta dividir qualquer termo pelo termo anterior.

q = a2/a1 = a3/a2 = a4/a3

Progressão Geométrica

Exemplos:

a) (3,9,27,81) é uma PG finita, onde $a_1 = 3$, $q = 3$.

$$q = 9/3 = 27/9 = 81/27 = 3$$

b) (2,-4,8,-16...) é uma PG infinita, onde $a_1 = 2$ e $q = -2$

$$q = -4/2 = 8/-4 = -16/8 = -2$$

Progressão Geométrica

Classificação da razão

1) $q > 1$ e $0 < q < 1$: **Crescente**

- **$q > 1$** e seus termos são positivos;
  exemplo: (1, 3, 9,...).

- **$0 < q < 1$** e seus termos são negativos;
  exemplo: (-81,-27,-9,...)

Progressão Geométrica

Classificação da razão

2) $q > 1$ e $0 < q < 1$: Decrescente

- **$q > 1$** e seus termos são negativos;
  exemplo: (-1,-3,-9,...).
- **$0 < q < 1$** e seus termos são positivos;
  exemplo: (2,2/3,2/9,...)

Progressão Geométrica

Classificação da razão

3) q < 0 : Alternante

Uma PG é alternante quando a sua razão q for menor que zero;

exemplo: (5,-50,500,...).

4) q = 1 : Constante

Uma PG é constante quando a razão ***q*** for igual a um; **exemplo**: (9,9,9,..).

Progressão Geométrica

Exercícios

1) Verifique se a sequência (4,12,36,45,108) é uma PG.

2) Calcule o valor de x na PG (8,-6,x).

Progressão Geométrica

FÓRMULA DO TERMO GERAL DE UMA PG

Em uma **PG** $(a_1, a_2, a_3,..., a_n,...)$ de razão **q,** partindo do 1º termo, para avançar um termo basta multiplicar **q** ao 1º termo ($a_2 = a_1 \,.\, q$); para avançar dois termos basta multiplicar q^2 ao 1º termo ($a_3 = a_1 \,.\, q^2$) e assim por diante. Desse modo encontramos o termo de ordem **n,** denominado termo geral da PG, que é dada por:

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

Progressão Geométrica

FÓRMULA DA SOMA DOS TERMOS DE UMA PG

Consideremos a PG (a_1, a_2, a_3,..., a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) e vamos indicar por S_n a soma de seus termos.

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

para $q \neq 1$.

Progressão Geométrica

FÓRMULA DA SOMA DOS TERMOS DE UMA PG INFINITA

Numa PG infinita, com $0 < q < 1$, denominamos soma de seus termos o número:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

Progressão Geométrica

FÓRMULA DO PRODUTO DOS TERMOS DE UMA PG

$$P = a_1^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

Exemplo

A partir da P.G. (18, 9, 9/2 ...), obtenha:

a) o termo geral da P.G.:

b) o 5º termo:

c) a soma até o 5º termo:

d) o produto até o 5º termo:

e) a soma da P.G. infinita:

TESTANDO OS CONHECIMENTOS

1) Um aluno está querendo divulgar uma informação na sua escola, então ele pensou na estratégia de passar esta informação de aluno para aluno. Nesta estratégia ele só necessitaria passar a informação uma única vez para dois alunos, gastando um minuto para divulgá-la a estes dois alunos. Os outros dois alunos também teriam que divulgá-la para mais dois alunos cada um, então, no primeiro minuto dois alunos estariam sendo informados, no segundo minuto quatro alunos estariam sendo informados, no terceiro minuto oito alunos estariam sendo informados e assim por diante.

Seguindo esta estratégia, no décimo minuto, quantos alunos estariam sendo informados?

a)2.048 alunos
b)1.024 alunos
c)512 alunos
d)256 alunos

TESTANDO OS CONHECIMENTOS

2) Em uma escola com 512 alunos, um aluno apareceu com o vírus do sarampo. Se esse aluno permanecesse na escola, o vírus se propagaria da seguinte forma: no primeiro dia, um aluno estaria contaminado; no segundo, dois estariam contaminados; no terceiro, quatro, e assim sucessivamente. A diretora dispensou o aluno contaminado imediatamente, pois concluiu que todos os 512 alunos teriam sarampo no:

a)9º dia.
b)10º dia.
c)8º dia.
d)5º dia.
e)6º dia.

TESTANDO OS CONHECIMENTOS

3) O quarto termo de uma progressão geométrica descrita pela sequência $a_n = (-3)^{-n}$, com $n \in N^*$, é

a) 1/27

b) 1/81

c) - 1/243

d) - 1/27

e) - 1/81

TESTANDO OS CONHECIMENTOS

4) Um dos perigos da alimentação humana são os microrganismos, que podem causar diversas doenças e até levar a óbito. Entre eles, podemos destacar a Salmonella. Atitudes simples como lavar as mãos, armazenar os alimentos em locais apropriados, ajudam a prevenir a contaminação pelos mesmos. Sabendo que certo microrganismo se prolifera rapidamente, dobrando sua população a cada 20 minutos, pode-se concluir que o tempo que a população de 100 microrganismos passará a ser composta de 3.200 indivíduos é:

a)1h e 35 min.
b)1h e 40 min.
c)1h e 50 min.
d)1h e 55 min.

TESTANDO OS CONHECIMENTOS

5) Quatro números são tais que os três primeiros formam uma progressão aritmética de razão 6, os três últimos uma progressão geométrica e o primeiro número é igual ao quarto. Podemos afirmar que:

a) Todos os quatro números são positivos.
b) Três dos quatro números são positivos.
c) Dois dos quatro números são positivos.
d) Um dos quatro números é positivo.
e) Nenhum dos números é positivo.

TESTANDO OS CONHECIMENTOS

6) Dada a PG $(-2^{11}, 2^{10}, -2^{9}, \ldots)$ o produto dos 19 primeiros termos é igual a:

a) $P_{19} = 2^{19}$
b) $P_{19} = (-2)^{19}$
c) $P_{19} = 2^{-38}$
d) $P_{19} = -2^{38}$
e) $P_{19} = (-2)^{38}$

TESTANDO OS CONHECIMENTOS

7) Calcule o oitavo termo da PG (3, 6, 12, ...).

TESTANDO OS CONHECIMENTOS

8) Calcule a razão de uma PG, sabendo que $a5=64$ e $a1=4$ e escreva a PG até o 5° termo.

TESTANDO OS CONHECIMENTOS

9) Determine o número de termos de uma PG, onde,

$$a_1 = \frac{1}{64}, a_n = 2 \ e \ q = 2$$

TESTANDO OS CONHECIMENTOS

10) Os termos da soma $S = 4 + 8 + 16 + ... + 2048$ estão em progressão geométrica.

Assinale o valor de S.

a) 4092

b) 4100

c) 8192

d) 65536

e) 196883

TESTANDO OS CONHECIMENTOS

11) Considere a progressão aritmética $(3, a_2, a_3, ...)$ crescente, de razão r, e a progressão geométrica $(b_1, b_2, b_3, 3, ...)$ decrescente, de razão q, de modo que $a_3 = b_3$ e $r = 3q$. O valor de b_2 é igual a

a) a_6
b) a_7
c) a_8
d) a_9

TESTANDO OS CONHECIMENTOS

12) Considerando que determinada árvore foi plantada em 1.º de novembro de 2009 com uma altura de 1 dm e que em 31 de outubro de 2011 sua altura era de 2,5 m e admitindo ainda que suas alturas, ao final de cada ano de plantio, nesta fase de crescimento, formem uma progressão geométrica, a razão deste crescimento, no período de dois anos, foi de

a) 0,5.
b) $5 \times 10^{-1/2}$.
c) 5.
d) $5 \times 10^{1/2}$.
e) 50.

TESTANDO OS CONHECIMENTOS

13) Uma das consequências do acidente nuclear ocorrido no Japão em março de 2011 foi o vazamento de isótopos radioativos que podem aumentar a incidência de certos tumores glandulares. Para minimizar essa probabilidade, foram prescritas pastilhas de iodeto de potássio à população mais atingida pela radiação.

A meia-vida é o parâmetro que indica o tempo necessário para que a massa de uma certa quantidade de radioisótopos se reduza à metade de seu valor.

Considere uma amostra de ${}_{53}I^{133}$, produzido no acidente nuclear, com massa igual a 2 g e meia-vida de 20 h.

Após 100 horas, a massa dessa amostra, em miligramas, será cerca de:

a) 62,5
b) 125
c) 250
d) 500