

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA  
ASSOCIAÇÃO AMPLA ENTRE CEFET-MG E UFSJ

Romulo José da Silva Júnior

ESTABILIZAÇÃO LOCAL ENTRADA-ESTADO DE SISTEMAS INCERTOS DISCRETOS NO  
TEMPO SUJEITOS A ATRASO VARIANTE NO TEMPO E ATUADORES SATURANTES

Belo Horizonte  
2022

Romulo José da Silva Júnior

ESTABILIZAÇÃO LOCAL ENTRADA-ESTADO DE SISTEMAS INCERTOS DISCRETOS NO  
TEMPO SUJEITOS A ATRASO VARIANTE NO TEMPO E ATUADORES SATURANTES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEL) do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Valter Júnior de Souza  
Leite

Coorientador: Prof. Dr. Luís Filipe Pereira Silva

Belo Horizonte  
2022

(Catalogação - Biblioteca Universitária – Campus Divinópolis – CEFET-MG)

S586e Silva Júnior, Romulo José da.

Estabilização local entrada-estado de sistemas incertos discretos no tempo sujeitos a atraso variante no tempo e atuadores saturantes. / Romulo José da Silva Júnior. – Belo Horizonte, 2022.

97 f. : *il.*

Orientador: Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite.

Coorientador: Prof. Dr. Luís Filipe Pereira Silva.

Área de Concentração: Modelagem e Controle de Sistemas.

Linha de Pesquisa: Sistema de Controle.

Dissertação (Mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais/Universidade Federal de São João del-Rei. Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica.

1. Atraso nos estados. 2. Sistemas incertos discretos no tempo. 3. Controle Robusto. 4. Estabilidade Entrada-Estado. 5. Ganho  $\ell_2$ . 6. Atuadores Saturantes. I. Leite, Valter Júnior de Souza. II. Silva, Luís Filipe Pereira. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Universidade Federal de São João del-Rei. V. Título.

CDU: 681.51

Romulo José da Silva Júnior

ESTABILIZAÇÃO LOCAL ENTRADA-ESTADO DE SISTEMAS INCERTOS DISCRETOS NO  
TEMPO SUJEITOS A ATRASO VARIANTE NO TEMPO E ATUADORES SATURANTES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEL) do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Comissão Avaliadora:

Prof. Dr. Fernando de Oliveira Souza  
Departamento de Engenharia Eletrônica  
UFMG

Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves  
Departamento de Engenharia Elétrica  
CEFET / MG

Prof. Dr. Valter Jr. de Souza Leite  
Departamento de Engenharia Mecatrônica  
CEFET / MG

Prof. Dr. Luís Filipe Pereira Silva  
Departamento de Engenharia Mecatrônica  
CEFET / MG

Belo Horizonte  
2022

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA  
ASSOCIAÇÃO AMPLA ENTRE CEFET-MG E UFSJ  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Dissertação intitulada “*Estabilização local entrada-estado de sistemas incertos discretos no tempo sujeitos a atraso variante no tempo e atuadores saturantes*”, desenvolvida por Romulo José da Silva Júnior, aprovada pela banca examinadora constituída pelos seguintes professores:

---

Prof. Dr. Valter Jr. de Souza Leite  
Departamento de Engenharia Mecatrônica – PPGEL CEFET / MG  
(Orientador)

---

Prof. Dr. Luís Filipe Pereira Silva  
Departamento de Engenharia Mecatrônica – CEFET / MG  
(Coorientador)

---

Prof. Dr. Fernando de Oliveira Souza  
Departamento de Engenharia Eletrônica – UFMG

---

Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves  
Departamento de Engenharia Elétrica – PPGEL CEFET / MG

Belo Horizonte  
2022

DEDICO ESTE TRABALHO A DEUS,  
CUJA PRESENÇA ME CONFORTA PE-  
RANTE AS TRIBULAÇÕES, AUXI-  
LIANDO NAS MINHAS ESCOLHAS,  
ME CONCEDENDO CONFIANÇA E FÉ  
FRENTE AOS DESAFIOS E ADVERSI-  
DADES.

# Agradecimentos

Agradeço,

Primeiramente a Deus por iluminar meus caminhos, me concedendo saúde e forças para realizar esse grande sonho, a conclusão do mestrado.

Minha mãe Márcia, pelo apoio, exemplo e suporte durante toda minha vida.

Meu pai Romulo, pelo apoio, exemplo e suporte durante toda minha vida.

Meu irmão Gabriel, pelo apoio e companheirismo, por acreditar em mim e incentivar meus sonhos.

Minha esposa Karina, por todo carinho e todos os bons momentos os quais me proporcionaram paz e tranquilidade. Pelas palavras de apoio e incentivo, sempre me mostrando que sou capaz, que posso confiar em mim mesmo. Por me amar e me fazer sentir tão feliz e especial.

Aos meus familiares, pela torcida e orações.

Aos meus amigos, Flaviane, Lorena, Marina, Fernanda, Matheus, Nathália, pela paciência, incentivo e apoio durante toda minha caminhada.

Meu orientador Valter Leite, pela amizade, confiança, por sempre buscar minha evolução para que eu apresente o melhor de mim mesmo, pelos ensinamentos e pela disponibilidade de estar apoiando durante toda a minha formação. Por me convidar e incentivar para seguir o caminho do Mestrado.

Meu co-orientador Luís Filipe, pela amizade, por guiar minha evolução, pelos ensinamentos e pela disponibilidade de estar apoiando durante toda a minha formação.

Meus amigos e companheiros de formação, Gabriel, Larissa, Alan e Lucas.

Todos os professores do CEFET-MG os quais contribuíram para minha formação, e aos avaliadores deste trabalho.

Por fim, agradeço à todos que de alguma forma contribuíram para conclusão deste trabalho.

A vida é como um lápis que certamente se  
esgotará, mas deixará uma bela escrita.

“Nami - One Piece”

# Resumo

Neste trabalho são desenvolvidos métodos para a síntese de controladores por realimentação de estado para sistemas discretos e invariantes no tempo com atraso nos estados, atuadores saturantes e sujeitos a perturbações pertencentes à classe dos sinais de energia. Admite-se que o atraso seja variante no tempo e que as matrizes do modelo que descrevem o sistema pertençam a um polítopo, cujo vetor de parâmetros seja incerto. A contribuição central da dissertação consiste na proposição de condições que podem prover a estabilização robusta local entrada-estado (ISS) da malha fechada para um conjunto de condições iniciais admissíveis e sinais de perturbação, limitados pela norma  $\ell_2$ . Essas condições avançam em relação a resultados encontrados na literatura, nos quais apenas a estabilização assintótica foi tratada. Para obter resultados menos conservadores, são utilizadas candidatas a funções de Lyapunov-Krasovskii (L-K) dependentes do parâmetro incerto. Além disso, as condições propostas para a síntese de controladores dependem do valor do atraso, porém sua complexidade não cresce com o aumento do valor do atraso. Para desenvolver esses métodos foram utilizadas a condição generalizada de setor, representando os atuadores saturantes como uma não linearidade do tipo zona-morta, a majoração de termos decorrentes dessas funções e o Lema de Finsler. Outra contribuição está nos procedimentos de otimização propostos que permitem melhores resultados na estimativa da região de atração, na tolerância a distúrbios e na minimização dos efeitos do distúrbio na saída do sistema. A ideia central nesses procedimentos de otimização consiste na reescrita da candidata a função de L-K em um espaço aumentado, permitindo que a abordagem atinja desempenhos comparáveis a de outras alternativas encontradas na literatura, mas com um custo computacional bem menor. Por fim, exemplos numéricos são apresentados para demonstrar a eficácia dos métodos propostos e estabelecer uma comparação com resultados existentes na literatura.

Palavras-chave: Atraso nos estados. Sistemas incertos discretos no tempo. Controle Robusto. Estabilidade Entrada-Estado. Ganho  $\ell_2$ . Atuadores saturantes.

# Abstract

In this work, methods are developed for the synthesis of state feedback controllers for discrete time-invariant systems with state-delay, saturating actuators and subject to disturbances that belong to the class of energy signals. It is assumed that the delay is time-varying and that the model matrices that describe the system belong to a polytope, whose parameter vector is uncertain. The central contribution of the dissertation consists in the proposition of conditions that can provide robust local input-to-state stability (ISS) of the closed loop for a set of admissible initial conditions and disturbance signals, limited by the  $\ell_2$  norm. These conditions advance in relation to results found in the literature, that only asymptotic stabilization was treated. To obtain less conservative results, candidates for Lyapunov-Krasovskii (L-K) functions dependent on the uncertain parameter are used. Furthermore, the proposed conditions for the controller synthesis depend on the delay value, but their complexity does not increase with the increase of the delay value. To develop these methods, the generalized sector condition was used, representing the saturating actuators as a non-linearity of the dead-zone type, the majoration of terms resulting from these functions and the Finsler's Lemma. Another contribution is the proposed optimization procedures that allow better results in the estimation of the attraction region, in the disturbance tolerance and in the minimization of the disturbance effects on the system output. The central idea in these optimization procedures is rewriting the candidate L-K function in an augmented space, allowing the approach to achieve performances comparable to other alternatives found in the literature, but with a much lower computational cost. Finally, numerical examples are presented to demonstrate the efficiency of the proposed methods and establish a comparison with existing results in the literature.

Key-words: State-delay. Discrete-time uncertain systems. Robust Control. Input-to-State Stability.  $\ell_2$  gain. Saturating actuators.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiv</b>
<b>Lista de Acrônimos e Notações</b>	<b>xv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Formulação do Problema . . . . .	1
1.1.1 Atuadores saturantes . . . . .	2
1.1.2 Sinais exógenos . . . . .	4
1.1.3 Estados atrasados . . . . .	6
1.2 Objetivo Geral . . . . .	8
1.3 Objetivos Específicos . . . . .	9
1.4 Organização do Documento . . . . .	9
<b>2 Fundamentos</b>	<b>11</b>
2.1 Revisão Bibliográfica . . . . .	11
2.2 Fundamentação Teórica . . . . .	15
2.2.1 Estabilidade no sentido de Lyapunov . . . . .	15
2.2.2 Estabilidade de Sistemas com Atraso nos Estados . . . . .	17
2.2.3 Estabilidade Entrada-Estado . . . . .	19
2.2.4 Estimativa do ganho $\ell_2$ . . . . .	21
2.2.5 Sistemas sujeitos à incerteza de parâmetros . . . . .	22
2.2.6 Síntese de Controladores Saturantes . . . . .	23
2.2.7 Modelagem por não-linearidade de setor . . . . .	25
2.2.8 Desigualdades Auxiliares . . . . .	25
2.3 Considerações Finais . . . . .	26
<b>3 Estabilização Entrada Estado</b>	<b>27</b>
3.1 Formulação do Problema . . . . .	27
3.2 Resultados Preliminares . . . . .	29
3.2.1 Candidata a Função de Lyapunov-Krasovskii . . . . .	29
3.2.2 Caracterização Algébrica da Região de Atração . . . . .	33
3.3 Projeto do controlador por realimentação de estado . . . . .	33
3.3.1 Condição com variável de folga . . . . .	38
3.4 Considerações Finais . . . . .	43

---

<b>4</b>	<b>Caracterização da Região de Atração</b>	<b>44</b>
4.1	Caracterização Geométrica da Região de Atração . . . . .	44
4.2	Procedimentos de Otimização . . . . .	49
4.2.1	Maximização da estimativa da região de atração . . . . .	50
4.2.2	Minimização dos efeitos da perturbação . . . . .	51
4.2.3	Maximização da Tolerância à perturbação . . . . .	51
4.3	Exemplos Numéricos . . . . .	51
4.3.1	Sistema precisamente conhecido . . . . .	51
4.3.2	Sistema com variação de parâmetros . . . . .	62
4.4	Considerações Finais . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>72</b>
5.1	Considerações Finais . . . . .	72
5.2	Publicações científicas . . . . .	73
5.3	Trabalhos Futuros . . . . .	74
<b>A</b>	<b>Ferramentas Matemáticas</b>	<b>75</b>
A.1	Complemento de Schur . . . . .	75
A.2	Procedimento S . . . . .	75
A.3	Lema de Finsler . . . . .	76
	<b>Referências</b>	<b>77</b>

# Lista de Figuras

1.1	Convergência dos estados para origem e sinal de controle saturado em cada configuração dos vértices do sistema (1.3) para a condição inicial $x_0 = [-1.8 \ -1.8]$ . . . . .	3
1.2	Evolução dos estados e sinal de controle saturado em cada configuração dos vértices do sistema (1.3) para a condição inicial $x_0 = [-2 \ -3]$ . . . . .	4
1.3	Evolução dos estados e sinal de controle saturante em cada configuração dos vértices do sistema (1.6) para a condição inicial $x_0 = [0 \ 0]$ . . . . .	5
1.4	Evolução dos estados e sinal de controle saturante em cada configuração dos vértices do sistema (1.9). . . . .	7
1.5	Estabilização dos estados e sinal de controle saturante em cada configuração dos vértices do sistema (1.9). . . . .	8
2.1	Região ISS . . . . .	21
2.2	Função de saturação $\text{sat}(u_{k(\ell)})$ , com $\underline{u}(\ell) = -\bar{u}(\ell)$ . . . . .	24
4.1	Convergência dos estados partindo da condição inicial $\varphi_0$ . . . . .	54
4.2	Comparação entre o sinal de controle e sinal de controle saturado. . . . .	55
4.3	Comparação entre Teorema 3.1 e (Castro <i>et al.</i> , 2020), do raio da região de atração estimada ao longo da variação de $\varepsilon$ , aplicado para o sistema 1. . . . .	56
4.4	Convergência dos estados e sinal de controle $u_{sat}$ para o sistema sujeito ao sinal exógeno $w_k$ . . . . .	59
4.5	Sinal de controle $u_{sat}$ e sinal exógeno $\omega_k$ - Procedimento $\mathcal{J}_3$ . . . . .	60
4.6	Procedimento de otimização $\mathcal{J}_3$ Teorema 3.1, para valores fixos de $\delta$ ao longo da variação de $\bar{u}$ . . . . .	61
4.7	Procedimento de otimização $\mathcal{J}_2$ Teorema 3.1, para valores fixos de $\gamma$ ao longo da variação de $\bar{u}$ . . . . .	61
4.8	Comparação do raio da região estimada de atração, ao longo da variação de $\varepsilon$ , relacionando o Teorema 3.1 e a solução apresentada por (Castro <i>et al.</i> , 2020). . . . .	64
4.9	Análise dos limites da região de atração e convergência das sequências de condições iniciais, localizadas na borda do elipsoide. . . . .	66
4.10	Convergência dos estados e ação de controle, sistema sujeito ao sinal exógeno $w_k$ . . . . .	67
4.11	Convergência dos estados e ação de controle, para o sistema sujeito ao sinal exógeno $w_k$ . . . . .	67

4.12	Procedimentos de otimização $\mathcal{J}_{\alpha_3}$ Teorema 3.2, para valores fixos de $\delta$ ao longo da variação de $\bar{u}$ . . . . .	69
4.13	Procedimento de otimização $\mathcal{J}_{\alpha_2}$ Teorema 3.2, para valores fixos de $\gamma$ ao longo da variação de $\bar{u}$ . . . . .	69

# Lista de Tabelas

4.1	Projeção do raio da $\mathcal{R}_\varepsilon$ - Teorema 3.1 , procedimento $\mathcal{J}_1$ - <i>exemplo 1.</i> . . . .	52
4.2	Região de Atração - Teoremas 3.2 e 3.1, procedimentos $\mathcal{J}_{\alpha_1}$ e $\mathcal{J}_1$ <i>exemplo 1.</i>	57
4.3	Minimização $\gamma$ e $\delta$ - comparação dos procedimentos $\mathcal{J}_2$ com $\mathcal{J}_{\alpha_2}$ e $\mathcal{J}_3$ com $\mathcal{J}_{\alpha_3}$ <i>exemplo 1.</i> . . . . .	62
4.4	Região de Atração - Teorema 3.1, procedimento $\mathcal{J}_1$ - <i>exemplo 2.</i> . . . . .	63
4.5	Estimativa da $\mathcal{R}_\varepsilon$ - Teorema 3.2 , procedimento $\mathcal{J}_{\alpha_1}$ , <i>exemplo 2.</i> . . . . .	65
4.6	Minimização $\gamma$ e $\delta$ - comparação dos procedimentos $\mathcal{J}_2$ com $\mathcal{J}_{\alpha_2}$ e $\mathcal{J}_3$ com $\mathcal{J}_{\alpha_3}$ <i>exemplo 2.</i> . . . . .	68
4.7	Estimativa da $\mathcal{R}_\varepsilon$ - <i>exemplo 2</i> modificado. . . . .	70

# Lista de Acrônimos e Notações

LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> - Desigualdades Matriciais Lineares.
BMI	<i>Bilinear Matrix Inequality</i> - Desigualdades Matriciais Bilineares.
L-K	Lyapunov-Krasovskii.
ISS	<i>Input-to-State Stability</i> - Estabilidade entrada-estado.

$\mathbb{N}$	conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^n$	conjunto vetorial de dimensão $n$ com elementos compostos por números reais.
$\mathbb{R}^+$	conjunto de números reais positivos.
$\mathbb{Z}^+$	conjunto de números inteiros positivos.
$\mathbb{R}^{n \times n_u}$	conjunto de matrizes com dimensões $n \times n_u$ e composta por elementos reais.
$M \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$	matriz de dimensões $n \times n_u$ composta por elementos reais.
$x \in \mathbb{R}^n$	vetor coluna com $n$ posições e elementos reais.
$M^\top$	transposta da matriz $M$ .
$M_{(i)}$	$i$ -ésima linha da matriz $M$ ou $i$ -ésimo elemento do vetor $M$ .
$M_{ii}$	elemento diagonal $(i, i)$ da matriz $M$ .
$M_{a \times b}$	matriz $M \in \mathbb{R}^{a \times b}$ .
$M_{(i)}^\top$	simplificação de notação para $(M_{(i)})^\top$ .
$M > 0$	matriz $M$ simétrica, quadrada, definida positiva.
$M \geq 0$	matriz $M$ simétrica e semi definida positiva.
$\  \cdot \ _2$	norma 2 de um vetor ou matriz.
*	elementos simétricos em relação à diagonal nas LMIs.
<b>I</b>	matriz identidade com dimensões apropriadas.
<b>0</b>	matriz nula com dimensões apropriadas.
$N$	número de vértices de um sistema.
$\mathcal{R}_A$	Região de Atração.
$\mathcal{R}_\varepsilon$	estimativa da Região de Atração.
$\mathcal{R}_0$	Região de Condições Iniciais.
$\mathcal{R}_{\varepsilon 0}$	estimativa da Região de Condições Iniciais.

$\underline{d}$	atraso mínimo.
$\overline{d}$	atraso máximo.
$d_k$	atraso no instante $k$ .
$\ell_2$	espaço de sinais limitados em energia.
$A \subseteq B$	$A$ é um subconjunto de $B$ .
$\text{diag}(A, B)$	matriz bloco diagonal $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ para as matrizes $A$ e $B$ quadradas.
$\text{He}(A)$	operador hermitiano, tal que $\text{He}(A) = A + A^\top$ .
$\text{tr}(M)$	traço da matriz $M$ .
$\otimes$	produto de Kronecker entre duas matrizes.
$c \in ]a, b[$	valores de $c$ tais que $a < c < b$ .

# Introdução

Neste trabalho são investigadas metodologias para síntese de controladores robustos, por meio da realimentação de estados, para uma classe de sistemas incertos e discretos no tempo, os quais são sujeitos à ação de perturbação e atuadores saturantes. O funcional de Lyapunov-Krasovskii, dependente de parâmetros, e o problema de otimização convexa, garantem a estabilidade local, através de um conjunto de desigualdades matriciais lineares (LMIs). Os atuadores saturantes fazem parte da maioria das aplicações reais, podendo causar perda de desempenho ou até mesmo instabilidade dos sistemas de controle. Além disso, a ação da perturbação pode fazer o processo operar fora da região desejada, tornando-o suscetível a instabilidade. Assim sendo, se faz necessária a estimação da região de condições iniciais as quais contemplam trajetórias convergentes para a origem, para esses sistemas em malha fechada e estabilidade entrada-estado (ISS, do inglês *Input-to-state stability*). O problema central, investigado nesse trabalho, consiste no projeto de controladores robustos, estabilidade local e ISS de sistemas com atuadores saturantes, dependentes de estados atrasados variantes no tempo e sujeitos à ação de perturbação.

## 1.1 Formulação do Problema

Esta seção apresenta a relevância da consideração dos efeitos gerados pelos atuadores saturantes em conjunto aos sinais exógenos em sistemas com estados atrasados. Algumas consequências de tais limitações são ilustradas por um exemplo de sistema discreto no tempo, demonstrando a importância de se considerar o limite máximo da ação do atuador físico no projeto dos controladores e a ação da perturbação em sistemas em malha fechada.

### 1.1.1 Atuadores saturantes

Para ilustrar os efeitos dos atuadores saturantes em um sistema, assume-se o sistema discreto no tempo e sujeito a parâmetros incertos invariantes no tempo dado por:

$$x_{k+1} = A(\alpha)x_k + B(\alpha)\mathbf{sat}(u_k), \quad (1.1)$$

em que  $x_k \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$  representa o sinal de controle, as matrizes  $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$  pertencem ao politopo descrito pela combinação convexa dos  $N$  vértices conhecidos,

$$[A(\alpha) \quad B(\alpha)] = \sum_{i=1}^N \alpha_i [A_i \quad B_i],$$

sendo  $\alpha$  pertencente ao simplex unitário  $\Gamma$  definido por:

$$\Gamma = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i \in [1, N] \right\}. \quad (1.2)$$

As limitações de  $u_k$  são representadas pela função descentralizada de saturação,  $\mathbf{sat}(u_k)_{(\ell)}$ , em que para cada  $\ell \in [1, n_u]$  define-se

$$\mathbf{sat}(u_k)_{(\ell)} = \begin{cases} \bar{u}_{(\ell)}, & \text{se } u_{k(\ell)} > \bar{u}_{(\ell)}, \\ u_{k(\ell)}, & \text{se } \underline{u}_{(\ell)} \leq u_{k(\ell)} \leq \bar{u}_{(\ell)}, \\ \underline{u}_{(\ell)}, & \text{se } u_{k(\ell)} < \underline{u}_{(\ell)}, \end{cases}$$

sendo  $\underline{u}_{(\ell)}$  e  $\bar{u}_{(\ell)}$  os limites mínimo e máximo que podem ser aplicados pelo  $\ell$ -ésimo atuador.

**Exemplo 1.1 (Atuadores saturantes)** *Considere um sistema (1.1) dado por (Tarbouriech et al., 2011, p. 8) com  $n = 2$ ,  $N = 2$  e  $n_u = 1$  discretizado pela amostragem  $T = 0.01s$  adaptado em (Lopes, 2017, p.10), determinado pelas seguintes matrizes*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.0001 & 0.0100 \\ 0.0100 & 1.0001 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1.0010 & 0.0100 \\ 0.0100 & 1.0010 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} -0.0001 \\ -0.0100 \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

*com vértices instáveis em malha aberta, sendo autovalores de  $A_1$  iguais a 0.9910 e 1.0110 e  $A_2$  iguais a 0.9901 e 1.0101, ou seja, possuem um autovalor com módulo maior que um. O sistema em malha fechada, sem restrições no atuador é fornecido por*

$$x_{k+1} = (A(\alpha) + B(\alpha)K)x_k. \quad (1.4)$$

*Escolhendo-se  $K = [13 \quad 10]$ , garante-se a estabilidade global, de modo que os autovalores estejam confinados no círculo de raio unitário, sendo, os módulos 0.9872 e 0.9135 para  $A_1$  e 0.9863 e 0.9126 para  $A_2$ . Dessa forma, a estabilidade do sistema em malha fechada é expressa pelos autovalores calculados de  $(A(\alpha) + B(\alpha)K)$ . Para o sistema (1.4) as trajetórias convergem assintoticamente para a origem, para qualquer condição inicial em  $\mathbb{R}^2$ . Porém, considerando o sinal de controle saturante, apresentado no sistema (1.1), com  $-5 \leq u_k \leq 5$ , o sistema em malha fechada torna-se não linear. A seguir são ilustrados alguns casos de condições iniciais.*

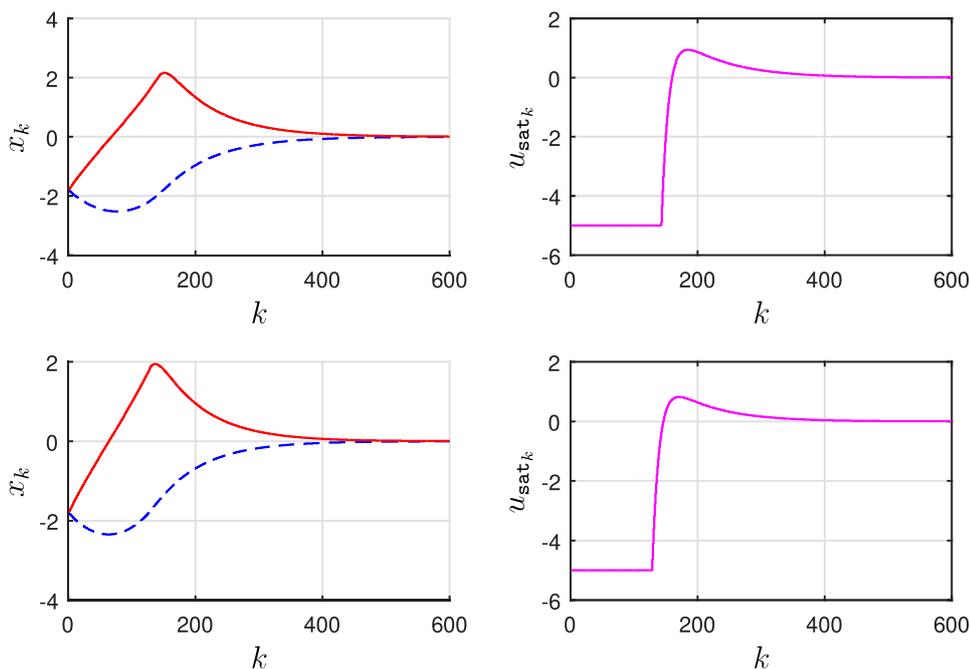


Figura 1.1: Convergência dos estados para origem e sinal de controle saturante em cada configuração dos vértices do sistema (1.3) para a condição inicial  $x_0 = [-1.8 \ -1.8]$ .

A partir da Figura 1.1 observa-se que, embora o sistema (1.6) esteja sujeito ao sinal de controle saturante, os estados convergem assintoticamente para a origem partindo-se da condição inicial  $[-1.8 \ -1.8]$ . Já para a condição inicial  $[-2 \ -3]$ , apresentada na Figura 1.2, observa-se que na configuração do primeiro vértice do sistema, embora o atuador esteja operando em seu limite, a energia fornecida não é suficiente para que os estados sejam levados até a origem. Sem as restrições, a energia do controlador ultrapassaria os limites apresentados, garantindo a convergência dos estados. Para a configuração do segundo vértice, é possível perceber que, embora os estados estejam estáveis, com ação do atuador saturante, não se tem a convergência para a origem, já que o primeiro estado, *curva tracejada em azul*, estabiliza em  $-5$ . Nota-se que, mesmo que os vértices do sistema (1.3) estejam próximos, as condições iniciais têm convergência distintas. Por tais motivos, se faz necessária a caracterização da região de atração, analisando a garantia da estabilidade local assintótica do sistema. Dessa forma, o sistema é localmente assintoticamente estável para um conjunto de condições iniciais, pertencentes a uma sub-região, denominada região de atração ( $\mathcal{R}_A$ ).

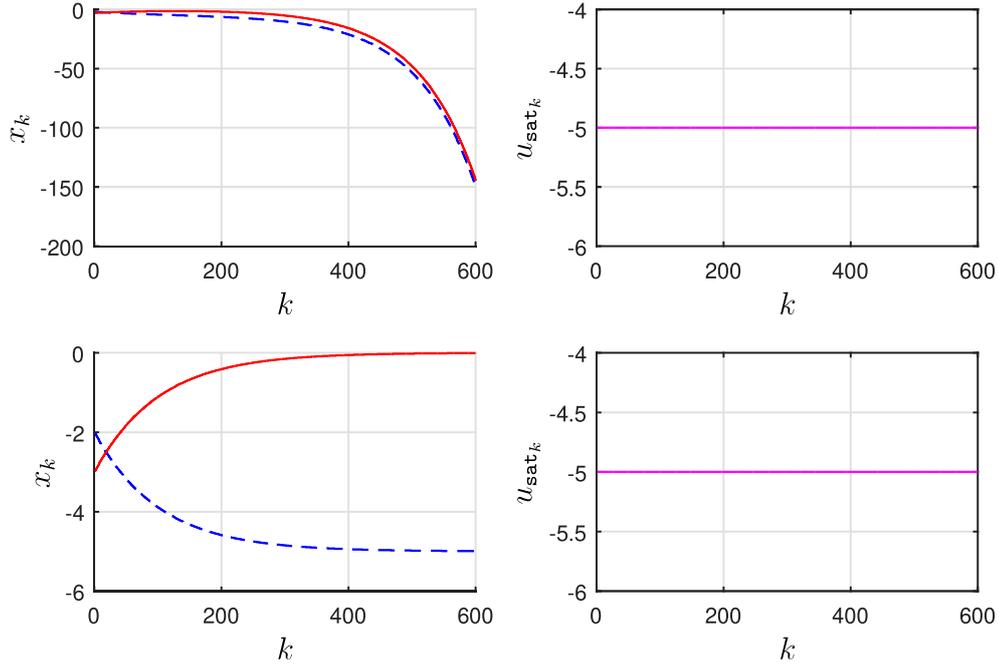


Figura 1.2: Evolução dos estados e sinal de controle saturante em cada configuração dos vértices do sistema (1.3) para a condição inicial  $x_0 = [-2 \ -3]$ .

### 1.1.2 Sinais exógenos

Para ilustrar os efeitos da perturbação em um sistema, assume-se o sistema discreto e invariante no tempo sujeito a parâmetros incertos invariantes no tempo dado por:

$$x_{k+1} = A(\alpha)x_k + B(\alpha)\text{sat}(u_k) + B_w(\alpha)w_k, \quad (1.5)$$

em que  $w_k \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de sinais exógenos e as matrizes  $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$  e  $B_w(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$  pertencem ao politopo descrito pela combinação convexa dos  $N$  vértices conhecidos,

$$[A(\alpha) \ B(\alpha) \ B_w(\alpha)] = \sum_{i=1}^N \alpha_i [A_i \ B_i \ B_{w_i}],$$

sendo  $\alpha$  pertencente ao simplex unitário  $\Gamma$  definido por (1.2).

**Exemplo 1.2 (Ação da Perturbação)** Considere um sistema (1.5) dado por (Tarbouriech et al., 2011, p. 8) com  $n = 2$ ,  $N = 2$ ,  $n_u = 1$  e  $n_w = 1$  discretizado pela amostragem  $T = 0.01s$  adaptado em (Lopes, 2017, p.10), estável em malha fechada, determinado pelas seguintes matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.0001 & 0.0100 \\ 0.0100 & 1.0001 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1.0010 & 0.0100 \\ 0.0100 & 1.0010 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = B_{w_1} = B_{w_2} = \begin{bmatrix} -0.0001 \\ -0.0100 \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

O sistema em malha fechada, sem restrições no atuador é fornecido por

$$x_{k+1} = (A(\alpha) + B(\alpha)K)x_k + B_w(\alpha)w_k. \quad (1.7)$$

De forma análoga ao exemplo 1.1 escolhendo-se  $K = [13 \ 10]$  com  $-5 \leq u_k \leq 5$ , o sistema em malha fechada torna-se não linear. Sendo assim, o sinal exógeno excita o sistema, levando-o para fora da origem, a convergência dos estados é garantida apenas para um limitante de energia de perturbação. A seguir é apresentado um caso com condição inicial nula e sinal de perturbação na forma de um pulso aplicado no instante  $k = 30$  com amplitude 480.

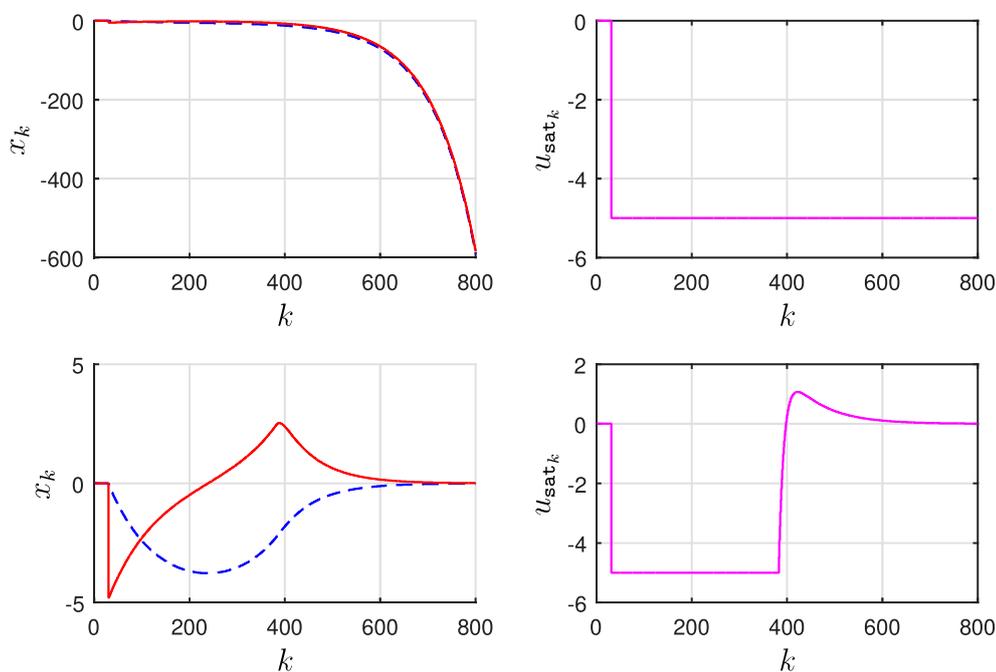


Figura 1.3: Evolução dos estados e sinal de controle saturante em cada configuração dos vértices do sistema (1.6) para a condição inicial nula e  $w_{30} = 480$ .

A partir da Figura 1.3, observa-se que na configuração do primeiro vértice do sistema (1.6), embora o atuador esteja operando em seu limite, a energia fornecida não é suficiente para que os estados sejam levados a origem. Já para o sistema operando na configuração do segundo vértice, com ação do atuador saturante, é possível perceber que os estados convergem assintoticamente para a origem. Dessa forma, mesmo que os vértices do sistema (1.6) estejam próximos, a ação da perturbação tem consequências distintas em cada um deles. Por tais motivos, se faz necessária a determinação da máxima energia de perturbação aplicada a todas as configurações do sistema politópico. Em aplicações reais, os sistemas estão sujeitos a diversos fatores externos os quais podem, ou não, ser mensuráveis. Logo, se faz necessária a caracterização da região de máxima energia externa

que o sistema pode assumir, uma vez ultrapassado o limite de energia de perturbação, o sistema torna-se instável.

### 1.1.3 Estados atrasados

Outro aspecto relevante presente nas aplicações reais é o atraso, o qual pode ser constante ou variante no tempo. Sendo assim, a caracterização da região de atração deve levar em consideração as influências dos estados atrasados. Para ilustrar os efeitos dos estados atrasados em um sistema, assume-se o sistema discreto e invariante no tempo sujeito a parâmetros incertos invariantes no tempo dado por:

$$x_{k+1} = A(\alpha)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d_k} + B(\alpha)\text{sat}(u_k), \quad (1.8)$$

em que  $x_{k-d_k}$  é o vetor de estados atrasados do sistema,  $d_k$  é um número inteiro positivo representando o atraso variante no tempo tal que  $d_k \in [0, \bar{d}]$ .  $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é matriz que corresponde a dinâmica do sistema afetada pelos estados atrasados, pertencente ao politopo descrito pela combinação convexa dos  $N$  vértices conhecidos,

$$[A(\alpha) \quad A_d(\alpha) \quad B(\alpha)] = \sum_{i=1}^N \alpha_i [A_i \quad A_{d_i} \quad B_i],$$

sendo  $\alpha$  pertencente ao simplex unitário  $\Gamma$  definido por (1.2).

**Exemplo 1.3 (Efeito dos estados atrasados)** *Considere um sistema (1.8) dado por (Tarbouriech et al., 2011, p. 8) com  $n = 2$ ,  $N = 2$ ,  $n_u = 1$  discretizado pela amostragem  $T = 0.01s$  adaptado em (Lopes, 2017, p.10), estável em malha fechada, determinado pelas seguintes matrizes*

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1.0001 & 0.0100 \\ 0.0100 & 1.0001 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1.0010 & 0.0100 \\ 0.0100 & 1.0010 \end{bmatrix}, \quad A_{d_1} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.05 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \\ A_{d_2} &= \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} -0.0001 \\ -0.0100 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

O sistema em malha fechada, sem restrições no atuador é fornecido por

$$x_{k+1} = (A(\alpha) + B(\alpha)K)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d_k}. \quad (1.10)$$

De forma análoga ao exemplo 1.1 escolhendo-se  $K = [13 \quad 10]$  com  $-5 \leq u_k \leq 5$ , o sistema em malha fechada torna-se não linear. Sendo assim, as contribuições adicionadas a partir dos estados atrasados, juntamente a limitação de energia do controlador podem tornar o sistema instável. A seguir é apresentado um caso com a sequência de condição inicial  $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ , em que o vetor  $[-2 \quad -3]$  corresponde a  $x_0$  e o vetor  $[-1 \quad -1]$  a  $x_{-1}$ .

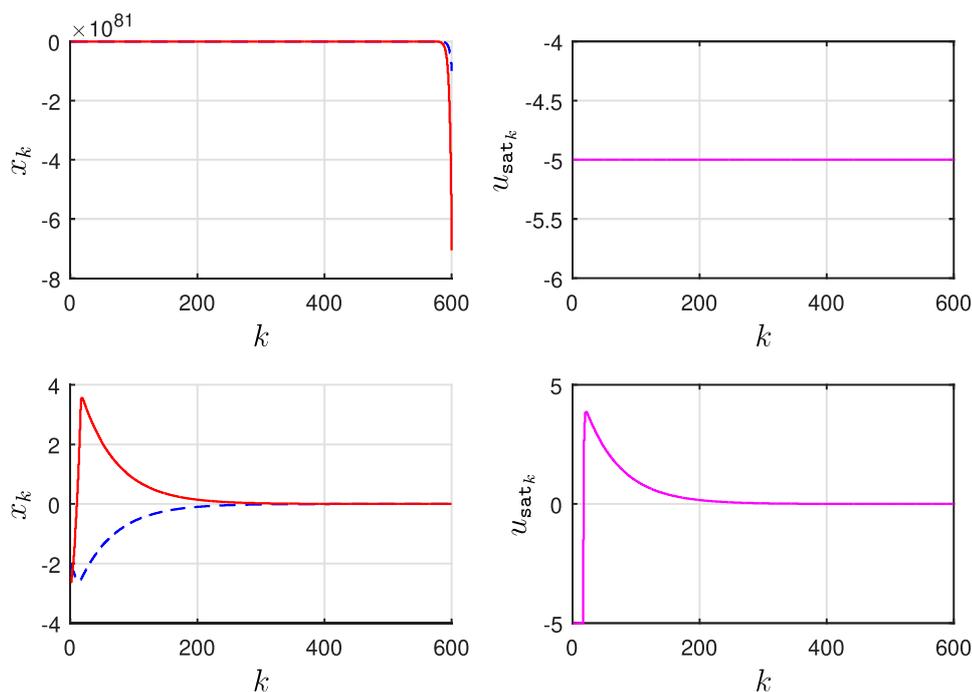


Figura 1.4: Evolução dos estados e sinal de controle saturante em cada configuração dos vértices do sistema (1.9).

A partir da Figura 1.4, observa-se que na configuração do primeiro vértice do sistema (1.9), as contribuições geradas a partir do atraso instabilizaram o sistema, uma vez que as limitações do controlador não conferem energia suficiente para levar os estados para a origem. Já para o sistema operando na configuração do segundo vértice, com ação do atuador saturante, é possível perceber que os estados convergem assintoticamente para a origem. Dessa forma, mesmo que os vértices do sistema (1.9) estejam próximos, a ação dos estados atrasados tem consequências distintas em cada um deles. Aumentando-se a máxima energia do controlador para  $\bar{u} = 30$  ambos vértices do sistema (1.9) são estabilizados, conforme pode ser observado a partir da Figura 1.5. Dessa forma, os efeitos dos estados atrasados estão diretamente relacionados com a energia disponível para controlar o sistema. Quanto menos energia o controlador dispõe mais aparentes são os efeitos do atraso de estado. Sendo assim, é necessário construir sínteses de controles que sejam capazes de considerar tais efeitos.

Neste trabalho, considera-se o atraso variante no tempo para sistemas incertos, descritos conforme a seguir

$$\begin{cases} x_{k+1} = A(\alpha)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d_k} + B(\alpha)\text{sat}(u_k) + B_w(\alpha)w_k, \forall k \geq 0 \\ x_{-j} = \varphi_{0(j)}, \forall j \in [\bar{d}, 0]. \end{cases} \quad (1.11)$$

Em que  $u_k = Kx_k$  é a lei de controle por realimentação de estados, a qual assegura, para um conjunto de condições iniciais admissíveis, a estabilidade assintótica do sistema

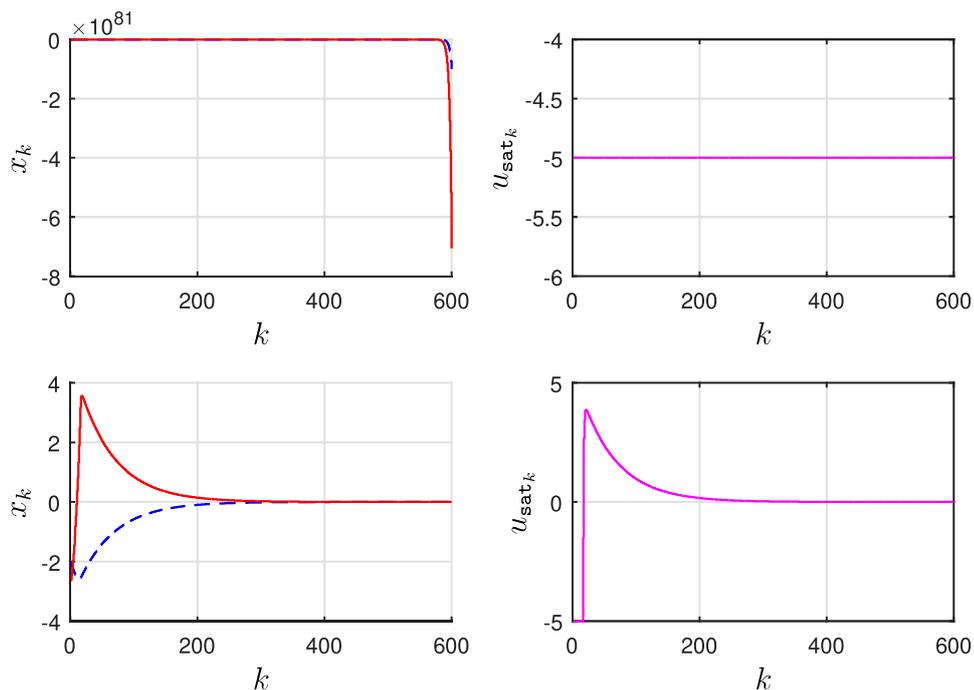


Figura 1.5: Estabilização dos estados e sinal de controle saturante em cada configuração dos vértices do sistema (1.9).

em malha fechada. Neste trabalho representa-se a saturação por uma função  $\phi(u_k) = \text{sat}(u_k) - u_k$  do tipo zona morta. Isto posto, o sistema (1.11) pode ser reescrito como

$$x_{k+1} = (A(\alpha) + B(\alpha)K)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d_k} + B(\alpha)\phi(u_k) + B_w(\alpha)w_k.$$

Portanto, são desenvolvidas condições baseadas na abordagem do funcional de Lyapunov-Krasovskii, objetivando formulações menos conservadoras comparado as já existentes na literatura, mantendo-se uma complexidade numérica relativamente baixa.

A seguir são apresentados os objetivos geral e específico e a organização do texto. No capítulo seguinte é realizada uma revisão bibliográfica do tema abordado nessa dissertação e uma formalização detalhada das ferramentas matemáticas e conceitos apresentados.

## 1.2 Objetivo Geral

O presente trabalho tem como objetivo geral determinar condições para a síntese de controladores robustos, por realimentação de estados, aplicadas em sistemas discretos no tempo, com atraso variante no tempo presente nos estados, sujeitos a atuadores saturantes, parâmetros incertos e invariantes no tempo e à ação de perturbação exógena. Tais condições visam garantir a convergência das trajetórias dos estados para a origem dado um conjunto de condições iniciais e um conjunto de perturbações admissíveis.

## 1.3 Objetivos Específicos

Para complementar o objetivo geral deste trabalho, alguns objetivos específicos também são necessários:

- Buscar formulações menos conservadoras em relação às condições encontradas na literatura para a síntese de controladores;
- Determinar uma nova caracterização geométrica da região de atração, garantindo que o sistema seja assintoticamente localmente estável, tornando esta região a maior possível, a partir da representação do estado do sistema com atraso em um espaço aumentado;
- Analisar e mitigar os efeitos das perturbações nas classes de sistemas investigados, a partir da nova abordagem;
- Aplicar as condições de síntese em exemplos numéricos.

## 1.4 Organização do Documento

Este trabalho está organizado em cinco capítulos. Para o presente capítulo, é realizada uma introdução dos conteúdos os quais serão abordados junto ao tema, os objetivos gerais e específicos, além da organização do texto.

No Capítulo 2 são apresentados os trabalhos já existentes na literatura, os principais conceitos, determinações e abordagens teóricas necessárias para compreensão e desenvolvimento deste trabalho. Tais como o conceito de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii, incertezas politópicas, sistemas com atraso, atuadores saturantes, estabilidade entrada-estado (ISS).

No Capítulo 3, inicialmente, é definida a função de L-K que será utilizada. Em seguida, são apresentadas duas abordagens para resolver o problema proposto. Ambas empregam a desigualdade de Jensen, para que as soluções não sejam dependentes de todos os estados atrasados. Dessa forma, a primeira delas, apresenta majorações de parte dos termos do funcional de L-K, o que introduz um escalar  $\varepsilon$  a ser determinado. Neste caso, as matrizes do funcional de Lyapunov-Krasovskii utilizado não são politópicas. Na segunda abordagem apresenta matrizes do funcional de L-K dependentes dos parâmetros incertos invariantes no tempo, ou seja politópicas, o que garante soluções menos conservadoras em relação ao uso do funcional de L-K da primeira solução. Além disso, é utilizado o Lema de Finsler para introduzir variáveis de folga que ampliam o conjunto de factibilidade das LMIs propostas. Note que nesta abordagem, não é empregada a majoração de termos que implicam na busca de um escalar  $\varepsilon$ .

No Capítulo 4, é apresentada uma nova abordagem para caracterização da região geométrica de atração, sendo esta, uma das principais contribuições deste trabalho. Além disso, são apresentadas funções objetivo, que juntamente às condições desenvolvidas, possuem um custo computacional relativamente baixo, ao comparar-se com a vigente literatura. Somado à isto, são desenvolvidos os procedimentos de otimização aplicados nos estudos de caso, para maximização da região de atração, análise da máxima energia de perturbação, e mitigação dos efeitos do sinal exógeno na saída regulada do sistema.

Já no Capítulo 5 são apresentadas algumas considerações finais sobre o trabalho além das propostas de trabalhos futuros. Por fim, o trabalho apresenta ainda, apêndices complementares para um melhor entendimento do desenvolvimento das condições.

# Fundamentos

Neste capítulo são apresentados trabalhos já existentes na literatura e fundamentos matemáticos básicos para o desenvolvimento das condições de projeto de controladores, por realimentação de estados para estabilização local de sistemas discreto no tempo, com estados atrasados, sujeitos a atuadores saturantes e perturbações exógenas.

## 2.1 Revisão Bibliográfica

Os processos reais são extremamente complexos, possuindo diversos fatores que dificultam a sua representação. Dessa forma, se faz necessária a obtenção de modelos matemáticos e ferramentas cada vez mais precisas e eficientes, sendo avaliados principalmente pelo desempenho do sistema de controle resultante. Além disso, pode ser considerado o tempo de obtenção da resposta e a complexidade numérica. Uma vez que o setor industrial demanda uma engenharia mais assertiva, sustentável e rentável, almeja-se otimizar os processos para economia de energia, reduzindo gastos e uso de recursos naturais. Entretanto, os sistemas reais geralmente possuem atraso nos estados variante no tempo, atuadores saturantes e sinais exógenos, os quais afetam negativamente o desempenho ou a estabilidade dos mesmos (Fridman, 2014).

O atraso nos estados é uma característica comumente encontrada em diversos sistemas dinâmicos reais, tais como: processos químicos, mecânicos, biológicos, econômicos, etc. (MacDonald, 2008; Hu & Wang, 2013; Fu & Ma, 2016). O atraso de estado representa um desafio relevante para aplicações, representações matemáticas e implementações computacionais. Segundo Niculescu (2001); Gu *et al.* (2003); Gomes da Silva Jr. & Leite (2007), a origem do atraso nesses sistemas possui, de forma geral, três razões distintas: uma propriedade intrínseca do sistema, uma consequência não desejada da ação de controle, ou ainda incorporação intencional de atrasos no controle de sistemas. Além disso, a estabilidade dos sistemas com atraso pode ser dependente ou não do valor do atraso.

Na literatura, sistemas discretos no tempo com atraso nos estados têm ganhado uma

maior atenção nas últimas décadas. Técnicas de representação em sistema aumentado foram estabelecidas em meados dos anos 90. Entretanto, tal abordagem requer uma elevada complexidade numérica, considerando todos os estados atrasados, para determinação dos ganhos de controladores robustos (Kapila & Haddad, 1998). como dependentes ou independentes do atraso. De acordo com (Niculescu, 2001), uma das técnicas mais utilizadas para a investigação de sistemas com atraso é baseada em funções de Lyapunov-Krasovskii (L-K). Aplicações dessa abordagem podem ser encontradas em Hetel *et al.* (2008); Miranda & Leite (2011); Caldeira *et al.* (2011); Xu *et al.* (2014); Castro *et al.* (2020). Em (Castro *et al.*, 2020) foi proposta a utilização dessa função relacionando estados atrasados com atuais, a qual foi utilizada como inspiração neste trabalho para tratar sistemas incertos e discretos no tempo.

Além do atraso, os processos reais estão sujeitos à limitação de energia, outro fator capaz de influenciar no desempenho podendo até mesmo causar instabilidade. De acordo com Pal & Negi (2018), para um sistema de controle com uma ampla gama de condições de operação, pode acontecer que a variável de controle atinja os limites do atuador e em sistemas práticos, não é possível atender às demandas de sinal de controle ilimitadas (como por exemplo: corrente, tensão, pressão, fluxo e etc.) devido à restrição física do atuador. Quando isso acontece, o ciclo de *feedback* é quebrado e o sistema funciona como um circuito aberto porque o atuador irá permanecer em seu limite independentemente da saída do processo. Como resultado, o sistema geral se torna inerentemente não linear e o controlador perde sua capacidade de controlar o processo. Combinando-se tais fatores com a ação integral, pode-se gerar um rápido crescimento do sinal de controle, denominado *windup* (Astrom & Rundqwist, 1989). Alguns trabalhos foram desenvolvidos para lidar com esse tipo de situação, sendo um deles apresentado por (Zaccarian & Teel, 2011), aplicando-se um compensador *anti-windup*, que estabelece uma relação entre o sinal de controle calculado e o efetivamente aplicado no sistema real, realimentando-se uma proporção desse sinal no controlador. Além de aumentar o tamanho da Região de Atração, a ação *anti-windup* pode melhorar o desempenho da malha fechada. (Tarbouriech *et al.*, 2011, p. 32). Sistemas discretos no tempo sujeitos a atuadores saturantes foram investigados em Gomes da Silva Jr. *et al.* (2001, 2008). Já em Negi *et al.* (2012), é apresentada uma abordagem para a síntese de controladores com ação *anti-windup*, aplicada em sistemas discretos no tempo, precisamente conhecidos e com atraso variante no tempo. Isto posto, a saturação não linear é inevitável para projetar um controlador: ela deteriora o desempenho do sistema em malha fechada e causa instabilidade (Hu & Lin (2001), Tarbouriech *et al.* (2011, p. 3,9-12)). Dessa forma, é necessário determinar uma região composta por todas as condições iniciais admissíveis, denominada de região de atração ( $\mathcal{R}_A$ ). De acordo com Tarbouriech *et al.* (2011, p. 14) e Gomes da Silva Jr. & Tarbouriech (2005),

a determinação de tal região pode ser uma tarefa desafiadora, pois a região pode não ser convexa, aberta e até ilimitada em algumas direções. Assim, uma estimativa da região de atração ( $\mathcal{R}_\varepsilon$ ) é maximizada de forma que  $\mathcal{R}_\varepsilon \subseteq \mathcal{R}_A$ .

Outro fator presente em aplicações reais é a ação de sinais exógenos, fazendo com que as trajetórias dos estados sejam desviadas da condição de equilíbrio, levando a queda de desempenho ou até mesmo perda de estabilidade. Nesses casos, geralmente, não se é possível garantir que as trajetórias do sistema sejam limitadas para qualquer sinal de perturbação. Sendo assim, é importante a caracterização de conjuntos de condições iniciais e sinais de perturbação admissíveis, garantindo a convergência dos estados para a origem. A caracterização de tais sinais exógenos, geralmente, é relacionada aos limites de amplitude ( $\ell_\infty$ ) e/ou energia ( $\ell_2$ ) do sinal de perturbação. Tal problemática é denominada como análise da estabilidade entrada-estado (ISS) (Tarbouriech *et al.*, 2011, p. 27). Dessa forma, uma vez cessada a perturbação a convergência para a origem deve ser garantida, ou seja, para sinais exógenos e condições iniciais admissíveis.

Sistemas discretos no tempo, com atraso nos estados e atuadores saturantes têm atraído atenção nos últimos anos. Os trabalhos (Ghiggi, 2008; Chen *et al.*, 2014; Silva *et al.*, 2018a; Castro *et al.*, 2020) propõem condições de estabilização assintótica. Além disso, esses trabalhos fornecem estimativas para o conjunto de condições iniciais tais que as trajetórias em malha fechada convergem para a origem, ou seja, estimativas da região de atração. Em (Ghiggi, 2008) são tratados: casos com atraso variante no tempo, obtendo uma lei de controle por realimentação de todos os estados, casos com atraso incerto invariante no tempo em sistemas precisamente conhecidos. O desempenho da malha fechada é investigado em (Lin, 2012) considerando a convergência exponencial dos estados para a origem para sistemas precisamente conhecidos.

Enquanto Xu *et al.* (2012); Chen *et al.* (2014); Pepe *et al.* (2017); Castro *et al.* (2020) empregam uma abordagem baseada em Lyapunov-Krasovskii (L-K), Silva *et al.* (2018a) adota uma representação aumentada sem atraso chaveada pelo valor do atraso, gerando estimativas muito maiores da região de atração com maior demanda computacional. Ressalta-se que tal condição representa uma expansão da proposta inicial apresentada em Hetel *et al.* (2008), reformulada por Binotti (2015) que inserem uma forma mais geral do funcional de Lyapunov-Krasovskii e (Silva, 2016) o qual trata de sistemas incertos com atraso variante no tempo. No entanto, os sinais de perturbação não são abrangidos por nenhum dos trabalhos mencionados acima. Dessa forma, o uso de estabilidade (ou estabilização) de entrada para estado local (regional), para lidar com sistemas discretos no tempo, sujeitos ao atraso de estados, apresentado em (de Souza *et al.*, 2019), representa uma abordagem baseada em espaço aumentado, estendendo os resultados de (Silva *et al.*, 2018a), abordando assim a presença de sinais exógenos.

Pepe *et al.* (2017) analisa a estabilidade incremental entrada-estado, em contextos de estabilidade exponencial local e global de uma classe de sistemas não lineares, discretos no tempo, sujeitos a atraso nos estados. Apesar de apresentar uma formulação geral, esta não se aplica diretamente ao caso de atuadores saturantes.

Abordagens distintas para a caracterização da região de condições iniciais para sistemas discretos com atrasos e atuadores saturantes são apresentadas por (Zhang *et al.*, 2011; Xu *et al.*, 2012; Chen *et al.*, 2014; Silva *et al.*, 2018b; Chen *et al.*, 2019; de Souza *et al.*, 2019; Castro *et al.*, 2020; Lima *et al.*, 2021). Tal caracterização é necessária para analisar a região de valores que os estados podem assumir, os quais possuirão trajetórias limitadas dentro de  $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$  convergentes para a origem.

Em Xu *et al.* (2012) são determinados ganhos para um controlador robustos por realimentação de estado, em que a região de atração é aproximada por conjuntos de condições iniciais, limitados uniformemente por uma bola dentro de  $\mathbb{R}^n$  com raio  $r_1$ . Zhang *et al.* (2011) apresentam uma abordagem para síntese de controladores robustos, por realimentação de estados, para sistemas chaveados, a partir de matrizes constantes que caracterizam a estrutura das incertezas. Já Chen *et al.* (2019) apresentam uma caracterização da estimativa da região de atração menos conservadora, em que duas bolas são determinadas por dois parâmetros  $r_1$  e  $r_2$  sendo o conjunto dos estados atrasados admitidos limitado por  $r_2 \leq 2r_1$ . Em Silva *et al.* (2018b) foi proposta uma abordagem para obtenção de um controlador fuzzy Takagi-Sugeno, em que a caracterização é dividida em duas partes, determinando um elipsóide  $\mathcal{C}$  em  $\mathbb{R}^n$  para o vetor de estados atuais e uma região  $\mathcal{B}(r_1, r_2)$  para a sequência de estados atrasados. Tal abordagem não considera o acoplamento entre o estado atual  $x_0$  e o estado atrasado  $x_{-1}$ . Uma caracterização geométrica mais abrangente foi apresentada em Silva *et al.* (2018a); de Souza *et al.* (2019) determinando um conjunto elipsoidal em um espaço aumentado com dimensão  $n(\bar{d} + 1)$ . Porém, por considerar todos os estados atrasados, tal solução requer um elevado custo computacional. Em Lima *et al.* (2021) uma função de Lyapunov-Krasovskii foi mapeada em um espaço aumentado, explorando melhores métodos de otimização para ampliar a região de atração estimada no caso de análise de estabilidade robusta (local). A vantagem neste caso é que as condições da LMI para o projeto do controlador permanecem com complexidade numérica independente do atraso máximo,  $\bar{d}$ . Já em Castro *et al.* (2020) a estimativa da região de atração considera os acoplamentos entre  $x_j$  e  $x_{j-1}$ ,  $j \in [0, \bar{d}]$ , descrevendo-se assim um funcional de L-K que relaciona diretamente os estados atrasados e atuais. Além disso, não se tem um sistema aumentado composto por todos os estados atrasados reduzindo-se a complexidade numérica das condições. Neste trabalho é abordada a estabilização robusta entrada-estado para uma classe de sistemas incertos discretos no tempo com atraso no estado variante no tempo e limitado por valores mínimo ( $\underline{d}$ ) e máximo ( $\bar{d}$ ), atuadores

saturantes e sujeitos a perturbações limitadas em energia ( $\ell_2$ ). A partir das condições desenvolvidas, são formulados procedimentos de otimização convexa para maximizar o conjunto de condições iniciais admissíveis ou maximizar o limite de energia das perturbações toleráveis. As seções a seguir apresentam os principais conceitos necessários no desenvolvimento deste trabalho.

## 2.2 Fundamentação Teórica

Esta seção apresenta algumas ferramentas matemáticas fundamentais para o desenvolvimento e compreensão dos principais resultados deste trabalho.

### 2.2.1 Estabilidade no sentido de Lyapunov

A estabilidade de um sistema pode ser determinada a partir da análise da sua energia interna. Se o sistema possui um valor de energia positivo e essa energia tende à zero conforme o tempo tende ao infinito, então o sistema é dito assintoticamente estável no sentido de Lyapunov. Esse método utiliza uma função escalar que representa a quantidade de energia do sistema em relação ao seu ponto de equilíbrio. De acordo com (Khalil, 1996, p. 140), se esta função for positiva e decrescente no tempo, pode-se concluir que o sistema é assintoticamente estável, sendo chamada de função de Lyapunov. Assim, as condições de Lyapunov para análise de estabilidade assintótica de um sistema linear discreto no tempo são apresentadas a seguir.

Considere o sistema linear discreto no tempo:

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad (2.1)$$

em que  $x_k \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados no instante  $k \in \mathbb{Z}^+$  e  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz dinâmica do sistema.

#### **Teorema 2.1 (Estabilidade Global por Lyapunov (Adaptado de Khalil (1996, p. 140)))**

*Existindo-se uma função de Lyapunov, determinada por  $V(x_k)$ , tal que:*

1.  $V(x_k) > 0 \quad \forall x_k \neq \mathbf{0}$  e  $V(x_k) = 0 \Leftrightarrow x_k = \mathbf{0}$ ,
2.  $\|x_k\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x_k) \rightarrow \infty$ ,
3.  $\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0 \quad \forall x_k \neq \mathbf{0}$  e  $\Delta V(x_k) = 0 \Leftrightarrow x_k = \mathbf{0}$ ,

*então o sistema (2.1) é dito globalmente assintoticamente estável.*

A partir da noção de superfície de Lyapunov, pode-se realizar a interpretação geométrica do Teorema 2.1, definida conforme a seguir.

**Definição 2.1 (Tarbouriech et al. (2011, p. 53))** Considere a função de Lyapunov  $V(x_k)$ . A superfície de nível  $\mathcal{L}_V(V,c)$  definida no espaço de estados por

$$\mathcal{L}_V(V,c) = \{x_k \in \mathbb{R}^n; V(x_k) = c, c > 0\},$$

é denominada superfície de Lyapunov.

Associado à superfície de nível  $\mathcal{L}_V(V,c)$ , pode-se definir a região de subnível  $\mathcal{S}(V,c)$  conforme a seguir:

**Definição 2.2** Considerando a superfície nível  $\mathcal{L}_V(V,c)$ , define-se o conjunto

$$\mathcal{S}(V,c) = \{x_k \in \mathbb{R}^n; V(x_k) \leq c, c > 0\},$$

cujas fronteira é dada por  $\mathcal{L}_V(V,c)$ .

Portanto, a condição  $\Delta V(x_k) < 0$  implica que, quando a trajetória do sistema cruza a superfície de Lyapunov  $\mathcal{L}_V(V,c)$ , ela se move para o interior do conjunto contrativo  $\mathcal{S}(V,c)$  estando sempre confinada no mesmo. Note que, a medida que  $c$  diminui, a superfície de Lyapunov encolhe em direção a origem. Isto posto, quando  $\Delta V(x_k) < 0$ , a trajetória do sistema entra na superfície de Lyapunov, a qual decresce em direção a origem, conforme o tempo aumenta, resultando na convergência das trajetórias para a origem. Quando o sistema é não-linear, a equação (2.1) não é capaz de descrever adequadamente o comportamento dinâmico em todos os pontos do  $\mathbb{R}^n$ . Tal não linearidade pode ser causada por diferentes fatores, sendo inerente ao sistema, ou mesmo pelo fato de que os atuadores reais não são capazes de realizar a ação de controle calculada pelo controlador, devido às limitações físicas, podendo causar instabilidade nos processos. Dessa forma, para atuadores saturantes, é considerado neste trabalho o sistema não autônomo:

$$x_{k+1} = Ax_k + B\text{sat}(u_k). \quad (2.2)$$

Se  $A$  não é Schur-estável, então, o sistema (2.2), pode ter estabilidade apenas localmente, o que nos leva à seguinte definição:

**Definição 2.3 (Tarbouriech et al. (2011, p. 14))** A região de atração  $\mathcal{R}_A$  da origem do sistema (2.2) é definida como o conjunto de todas as condições iniciais  $x_0$ , cujas respectivas trajetórias convergem assintoticamente para a origem. Em outras palavras, se  $x_0 \in \mathcal{R}_A$  então  $x_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

Assim sendo, é necessário determinar uma candidata a função de Lyapunov que satisfaça condições de estabilidade local, tal fator será explorado nas seções seguintes.

### 2.2.2 Estabilidade de Sistemas com Atraso nos Estados

Conforme apresentado na seção 2.2.1, o método de Lyapunov pode ser empregado para realizar a análise de estabilidade de sistemas sem a presença do atraso. Dessa forma, encontra-se uma função de Lyapunov  $V(x_k)$ , a qual pode representar uma medida generalizada da energia do desvio dos estados em relação ao ponto de equilíbrio  $x_k = 0$ .

A dependência dos estados passados, e não apenas do estado atual  $x_k$ , foi proposta inicialmente por Kolmanovskii & Myshkis (1992, p. 166). Para sistemas dependentes de estados atrasados, o conceito de estado é caracterizado por uma sequência de vetores no  $\mathbb{R}^n$  no intervalo de instantes  $d \in [-\bar{d}, 0]$ , sendo  $\bar{d}$  o atraso máximo. Sendo assim, a sequência do estado inicial é representada, no presente trabalho, por  $\varphi_{(\bar{d},0)}$ . Por sua vez, o estado do sistema em um instante  $k$  é denotado por  $\varphi_{(\bar{d},k)} = \{x_{k-\bar{d}}, \dots, x_k\}$ . Neste trabalho, buscando uma simplificação de representação, são chamados de estados atuais, aqueles definidos pelo vetor  $x_k$ , e os estados atrasados são descritos pelos demais vetores da sequência, denotados por  $x_{k-j}$ ,  $j \in [\bar{d}, 1]$ . Logo, busca-se uma função  $V(\varphi_{(\bar{d},k)})$  dependente de  $\varphi_{(\bar{d},k)}$ , considerando-se o desvio dos estados em relação ao ponto de equilíbrio  $x_k = 0$ . Essa dependência dos estados passados é determinada como candidata a função de Lyapunov-Krasovskii (Fridman, 2014, p. 63). Dessa forma, o método de Lyapunov-Krasovskii pode ser empregado para investigar a estabilidade assintótica de sistemas autônomos discretos no tempo com atraso nos estados, descritos conforme a seguir:

$$x_{k+1} = Ax_k + A_d x_{k-d_k}, \quad (2.3)$$

em que  $x_{k-d_k}$  é o vetor de estados atrasados do sistema,  $A$  e  $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são as matrizes que correspondem a dinâmica do sistema afetada pelos estados atrasados,  $d_k$  é um número inteiro positivo representando o atraso variante no tempo tal que  $d_k \in [0, \bar{d}]$ .

Para definição dos teoremas para análise de estabilidade dos sistemas são utilizadas as funções auxiliares propostas em (Khalil, 1996, p. 144) definidas a seguir.

**Definição 2.4 (Função classe  $\mathcal{K}$ )** *Uma função contínua  $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$  é dita pertencer a classe  $\mathcal{K}$  se for estritamente crescente e  $\alpha(0) = 0$ . É dita pertencente à classe  $\mathcal{K}_\infty$  se  $a = \infty$  e  $\alpha(r) \rightarrow \infty$  quando  $r \rightarrow \infty$ .*

**Definição 2.5 (Função classe  $\mathcal{KL}$ )** *Uma função contínua  $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  é dita pertencer a classe  $\mathcal{KL}$  se, para cada  $s$  fixo, o mapeamento  $\beta(r, s)$  pertence a classe  $\mathcal{K}$  em relação à  $r$  e, para cada  $r$  fixo, o mapeamento  $\beta(r, s)$  é decrescente em relação à  $s$  e  $\beta(r, s) \rightarrow 0$  a medida que  $s \rightarrow \infty$ .*

O Teorema de Lyapunov-Krasovskii, adaptado de (Gu *et al.*, 2003, p. 11), empregado para análise de estabilidade de sistemas com atraso nos estados é apresentado a seguir.

**Teorema 2.2 (Estabilidade Global de Lyapunov-Krasovskii)** *Se existir uma função  $V(\varphi_{(\bar{d},k)})$ , denominada função de Lyapunov-Krasovskii, e funções  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  classe  $\mathcal{K}$  e a função  $\kappa_3$  classe  $\mathcal{KL}$ , tal que*

1.  $\kappa_1 \left( \|\varphi_{(\bar{d},0)}\|^2 \right) \leq V(\varphi_{(\bar{d},k)}) \leq \kappa_2 \left( \|\varphi_{(\bar{d},k)}\|_d^2 \right),$
2.  $\Delta V(\varphi_{(\bar{d},k)}) \leq -\kappa_3 \left( \|\varphi_{(\bar{d},0)}\|^2 \right),$

em que

$$\Delta V(\varphi_{(\bar{d},k)}) = V(\varphi_{(\bar{d},k+1)}) - V(\varphi_{(\bar{d},k)}),$$

então o sistema autônomo (2.3) é globalmente assintoticamente estável.

### Funcional de Lyapunov-Krasovskii

Objetivando exemplificar o Teorema 2.2 é apresentado a seguir o desenvolvimento empregando uma função de Lyapunov-Krasovskii com dependência dos estados atrasados dada por:

$$V(\varphi_k) = x_k^\top P x_k + \sum_{j=k-\bar{d}}^{k-1} x_j^\top Q x_j > 0, \quad (2.4)$$

em que a variação da energia é expressa por:

$$\Delta V(\varphi_k) = V(\varphi_{k+1}) - V(\varphi_k) < 0. \quad (2.5)$$

Dessa forma, aplicando-se (2.4) em (2.5) tem-se:

$$\Delta V(\varphi_k) = x_{k+1}^\top P x_{k+1} + \sum_{j=k-\bar{d}+1}^k x_j^\top Q x_j - x_k^\top P x_k - \sum_{j=k-\bar{d}}^{k-1} x_j^\top Q x_j < 0,$$

a qual pode ser reescrita no formato

$$\Delta V(\varphi_k) = x_{k+1}^\top P x_{k+1} + x_k^\top (Q - P) x_k - x_{k-\bar{d}}^\top Q x_{k-\bar{d}} < 0.$$

**Observação:** A análise de estabilidade apresentada assegura estabilidade global. Porém, se houver alguma não-linearidade, tal qual atuadores saturantes, é necessária a análise de estabilidade local, pois podem haver estados suficientemente grandes para os quais o atuador não possua energia suficiente para atrair a respectiva trajetória para a origem. Dessa forma, não se é possível representar adequadamente o comportamento dinâmico do sistema, para todos os pontos de  $\mathbb{R}^n$ . Logo, torna-se relevante estimar o conjunto de condições iniciais para as quais as trajetórias são atraídas para a origem. Tais questões serão abordadas no capítulo seguinte.

### 2.2.3 Estabilidade Entrada-Estado

Considere que o sistema (2.3) esteja sujeito a uma entrada de perturbação externa, em que:

$$x_{k+1} = Ax_k + A_d x_{k-d_k} + B_w w_k \quad (2.6)$$

em que  $w_k \in \mathbb{R}^{n_w}$  é o sinal de perturbação e  $B_w \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$ . Um sistema é dito estável no sentido de entrada-estado (ISS), se o mesmo for globalmente assintoticamente estável quando não houver entradas de perturbação, e se as trajetórias, excitadas por um sinal externo, forem limitadas por uma função ao longo do tempo. Inicialmente, o conceito de ISS foi definido por Sontag (1989), para o caso contínuo no tempo. A seguir, é apresentada a definição de ISS para o caso discreto no tempo.

**Definição 2.6 (ISS - Adaptada de (Sontag, 1989) e (Khalil, 1996, p. 175))** *O sistema (2.6) é dito estável de entrada-estado se existir uma função  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$  e uma função  $\alpha$  de classe  $\mathcal{K}$  tais que, para qualquer sequência inicial  $\varphi_{(\bar{d},0)}$  e qualquer entrada limitada  $w_k$ , a solução  $\varphi_{(\bar{d},k)}$  existe para todo  $k \geq k_0$  e satisfaz*

$$\|\varphi_{(\bar{d},k)}\| \leq \beta(\|\varphi_{(\bar{d},0)}\|, k - k_0) + \alpha\left(\sup_{k_0 \leq \bar{k} \leq k} \|w_{\bar{k}}\|\right) \quad (2.7)$$

Segundo Khalil (1996), a inequação (2.7) garante que para cada entrada limitada  $w_k$ , a sequência  $\varphi_{(\bar{d},k)}$  seja limitada. Além disso, conforme  $k$  aumenta, os estados caracterizados por  $\varphi_{(\bar{d},k)}$  são limitados por uma função classe  $\mathcal{KL}$  do  $\sup_{k \geq k_0} \|w_k\|$ . Para  $w_k \equiv 0$ , (2.7) é reduzido para

$$\|\varphi_{(\bar{d},k)}\| \leq \beta(\|\varphi_{(\bar{d},0)}\|, k - k_0),$$

logo, a estabilidade entrada-estado implica que a origem de um sistema autônomo, não excitado, (2.3) é globalmente assintoticamente estável. A noção de estabilidade de entrada para estado é definida para o caso global onde os estados iniciais e a entrada podem ser arbitrariamente grandes. Uma versão local desta noção adaptada de (Leite *et al.*, 2020, p. 357-366) e considerações do caso contínuo presentes em (Tarbouriech *et al.*, 2011, p. 29)) são apresentadas a seguir.

Quando um sistema de controle está sujeito à ação de sinais exógenos, não se pode garantir que as trajetórias do mesmo convirjam para a origem enquanto as perturbações  $w_k$  não são nulas, ao longo de  $k \rightarrow \infty$ . Logo, minimiza-se a influência desta perturbação sobre o sistema. Neste caso, garante-se que qualquer trajetória  $\varphi_{(\bar{d},k)}$  seja limitada para sinais exógenos  $w$  também limitados. Dessa forma, no presente trabalho, busca-se por perturbações limitadas em energia, ou seja, considera-se que o sinal  $w$  tem norma  $\ell_2$  menor que  $\delta^{-1}$ , isto é, a relação

$$\mathcal{P} \triangleq \{w \in \mathbb{R}^{n_w} : \|w\|_2^2 \leq \delta^{-1}\}, \quad (2.8)$$

sendo  $\|w\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^\top w_k$ .

Para garantir que as trajetórias do sistema (2.6) sejam limitadas, é considerada a função abaixo

$$\nu_k \triangleq \Delta V(\varphi(\bar{d},k)) - w_k^\top w_k,$$

em que  $V(\varphi(\bar{d},k)) > 0$  é uma candidata a função de Lyapunov-Krasovskii. Assim tem-se

$$\sum_{i=0}^k \nu_i = V(\varphi(\bar{d},k)) - V(\varphi(\bar{d},0)) - \sum_{i=0}^k w_i^\top w_i$$

Definindo-se os seguintes conjuntos associados a  $V(\varphi(\bar{d},k))$ :

$$\mathcal{R}_0 \triangleq \{\varphi(\bar{d},0) \in \mathbb{R}^n : V(\varphi(\bar{d},k)) \leq \beta^{-1}\}, \quad (2.9)$$

$$\mathcal{R}_\mathcal{E} \triangleq \{\varphi(\bar{d},0) \in \mathbb{R}^n : V(\varphi(\bar{d},k)) \leq \eta^{-1}\}, \quad (2.10)$$

em que  $\eta^{-1} = \beta^{-1} + \delta^{-1}$ . Logo, se  $\nu_k < 0$ , tem-se  $\forall \varphi(\bar{d},0) \in \mathcal{R}_0$  e  $w_k \in \mathcal{P}$  em que:

1. se  $w_k \neq \mathbf{0}$ , então

$$V(\varphi(\bar{d},k)) < V(\varphi(\bar{d},0)) + \|w\|_2^2 \leq \beta^{-1} + \delta^{-1} = \eta^{-1},$$

e portanto, as trajetórias do sistema não saem do conjunto  $\mathcal{R}_\mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}_\mathcal{A}$ ;

2. se  $w_k = \mathbf{0}$ ,  $\forall k \geq 0$ , então  $\Delta V(\varphi(\bar{d},k)) < 0$ , o que por sua vez garante que  $\varphi(\bar{d},0) \rightarrow \mathbf{0}$ , conforme  $k \rightarrow \infty$ .

Nota-se que  $\nu_k < 0$ , assegura que  $\mathcal{R}_\mathcal{E}$  é uma região de estados atingíveis considerando que  $\varphi(\bar{d},0) \in \mathcal{R}_0$  e que  $w \in \mathcal{P}$ . Além disso, para  $w_k = \mathbf{0}$ , se  $\nu_k < 0$ , segue que  $\Delta V(\varphi(\bar{d},k)) < 0$ ,  $\forall \varphi(\bar{d},k) \in \mathcal{R}_\mathcal{E}$ , o que significa que  $\mathcal{R}_\mathcal{E}$  está contido na região de atração do sistema ( $\mathcal{R}_\mathcal{A}$ ) e pode ser vista como uma estimativa da mesma. Destaca-se que, uma abordagem para o caso contínuo pode ser observada a partir de (Tarbouriech *et al.*, 2011, p. 29).

A representação da estabilidade entrada-estado pode ser observada a partir da Figura 2.1. Para o tal, tomando-se o instante  $k_0$ , **em azul claro**, como ponto de partida, o sinal exógeno  $w$  inicia sua ação, assim, as condições iniciais são pertencentes ao conjunto  $\mathcal{R}_0$ . Isto posto, para quaisquer valores de  $w_k$ , a trajetória dos estados permanece confinada em  $\mathcal{R}_\mathcal{E}$ , conforme pode ser observado a partir da curva tracejada **em vermelho**. Sendo cessada a perturbação no instante  $k_1$ , **em azul escuro**, garante-se a convergência dos estados para a origem, ao passo que  $k \rightarrow \infty$ . Dessa forma, a partir da estabilidade entrada-estado, para o sistema não autônomo

$$x_{k+1} = Ax_k + B\text{sat}(Kx_k) + A_d x_{k-d_k} + B_w w_k,$$

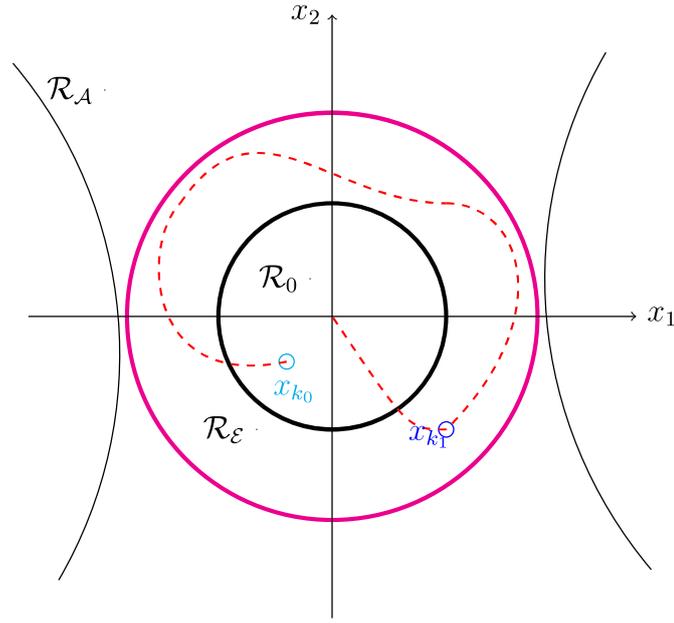


Figura 2.1: (Adaptada de (Tarbouriech *et al.*, 2011)) Condição inicial contida em  $\mathcal{R}_0$ , sujeita a um sinal exógeno o qual se inicia no instante  $k_0$ . A trajetória do estado, não ultrapassa a região  $\mathcal{R}_E$  estimada para  $\mathcal{R}_A$ . Dessa forma, ao atingir-se  $w_k = \mathbf{0}$  para  $k \geq k_1$ , o estado converge assintoticamente para a origem, demonstrando assim, a estabilidade entrada-estado do sistema.

é possível projetar os ganhos  $K$  do controlador robusto, o qual será melhor descrito nas seções seguintes, objetivando maximizar a estimativa da região de condições iniciais  $\mathcal{R}_0$ , para um determinado limite de energia de perturbação,  $\delta^{-1}$ , ou mesmo garantir a tolerância ao maior valor possível da energia de perturbação.

### 2.2.4 Estimativa do ganho $\ell_2$

A estabilidade  $\ell_2$  desempenha um papel especial na análise de sistemas. Conforme apresentado em (Khalil, 1996, p. 209), é natural trabalhar sinais integráveis ao quadrado, que podem ser vistos como sinais de energia finita. Em muitos problemas de controle, o sistema é representado como um mapeamento de uma entrada de perturbação  $w_k$  para uma saída controlada  $z_k$ , que deve ser pequena. Para sinais de entrada  $\ell_2$ , o sistema de controle é projetado para tornar o ganho finito do mapeamento de entrada-saída  $\ell_2$  estável e minimizar o ganho  $\ell_2$ . Em tais problemas, é importante não apenas ser capaz de descobrir se o sistema é estável com ganho finito  $\ell_2$ , mas também calcular o ganho ou um limite superior sobre o mesmo.

Considere o sistema discreto não-linear, a seguir, sujeito a um sinal exógeno  $w_k$ :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + A_d x_{k-d_k} + B_w w_k \\ z_k &= Cx_k, \end{aligned}$$

sendo  $z_k \in \mathbb{R}^{n_z}$  a saída regulada a partir de  $C \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$ .

**Definição 2.7 (Adaptada de (Lu *et al.*, 2009; Zheng & Wu, 2008))** Dado  $\gamma > 0 \in \mathbb{R}$ . Diz-se que o sistema (2.11) possui ganho  $\ell_2$  restrito menor que  $\gamma$ , se a seguinte condição é satisfeita:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k^\top z_k < \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} w_k^\top w_k, \quad (2.11)$$

sob a condição inicial  $\varphi_{(\bar{d},0)} = \mathbf{0}$  e para todo  $w_k \in \mathcal{P}$ .

Definindo  $\bar{\nu}_k = \nu_k + \gamma^{-2} z_k^\top z_k = \Delta V(\varphi_{(\bar{d},k)}) - w_k^\top w_k + \gamma^{-2} z_k^\top z_k$ ,  $\forall k > 0$ , sendo  $V(\varphi_{(\bar{d},k)}) > 0$  a candidata a função de Lyapunov-Krasovskii, tal que

$$\sum_{i=0}^k \bar{\nu}_k = V(\varphi_{(\bar{d},k)}) - V(\varphi_{(\bar{d},0)}) - \sum_{i=0}^k w_i^\top w_i + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=0}^k z_i^\top z_i. \quad (2.12)$$

Logo, quando  $\bar{\nu}_k < 0$  tem-se que:

1. se  $w_k = \mathbf{0}$ , então  $\Delta V(\varphi_{(\bar{d},k)}) < -\gamma^{-2} z_k^\top z_k \leq 0$ , o que garante  $\varphi_{(\bar{d},k)} \rightarrow \mathbf{0}$  para  $k \rightarrow \infty$ .
2. se  $w_k \neq \mathbf{0}$  e  $\varphi_{(\bar{d},0)} \in \mathcal{R}_0$ , isto é,  $\varphi_{(\bar{d},0)}$  pertence a região de condições iniciais, com  $w_k$  satisfazendo (2.8):

- (a)  $V(\varphi_{(\bar{d},k)}) < V(\varphi_{(\bar{d},0)}) + \|w\|_2^2 \leq \delta^{-1}$ , o que por sua vez implica que as trajetórias do sistema não saem do conjunto  $\mathcal{R}_\mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}_\mathcal{A}$ ;
- (b) para  $k \rightarrow \infty$ ,  $\|z_k\|_2^2 < \gamma^2 \|w\|_2^2 + \gamma^2 V(\varphi_{(\bar{d},0)})$ . Desta forma, se  $\varphi_{(\bar{d},0)} = \mathbf{0}$ , segue que  $\|z_k\|_2^2 < \gamma^2 \|w\|_2^2$ , ou seja,  $\gamma^2$  é um fator limitante para o ganho  $\ell_2$ .

Assim  $\bar{\nu}_k < 0$  assegura que  $\mathcal{R}_\mathcal{E}$  é uma região de estados possíveis considerando que  $\varphi_{(\bar{d},0)} \in \mathcal{R}_0$  e  $w \in \mathcal{P}$ . Além disso, no caso em que  $w_k = \mathbf{0}$ , se  $\bar{\nu}_k < 0$ , tem-se  $\Delta V(\varphi_{(\bar{d},k)}) < 0$ ,  $\forall \varphi_{(\bar{d},k)} \in \mathcal{R}_\mathcal{E}$ , o que significa que  $\mathcal{R}_\mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}_\mathcal{A}$ .

### 2.2.5 Sistemas sujeitos à incerteza de parâmetros

Os processos físicos reais possuem uma gama de complexidade expressivamente maior que seus modelos matemáticos os quais, em diversos casos, são representados com uma aproximação, desconsiderando-se variáveis ou fenômenos. Para uma modelagem mais fiel é necessário considerar os diferentes tipos de incertezas que o processo pode vir a possuir, as quais podem ser oriundas da presença de ruídos, erros e simplificações decorrentes da linearização do sistema, dinâmicas não modeladas ou não conhecidas e variações paramétricas. Dessa forma, muitos parâmetros são incertos durante o funcionamento do sistema, logo, é de suma importância empregar técnicas que tornam possível garantir a estabilidade do sistema nessas condições. Sendo assim, é necessário representar o sistema de forma que as incertezas estejam presentes, ou seja, construir um modelo matemático fixo denotado por (sistema nominal) somado as incertezas.

### Classificação das incertezas

Existem diversas formas de representação das incertezas de parâmetro de um sistema, por exemplo, as representações de incertezas por uma limitação em norma ou por um polítopo convexo no espaço. Neste trabalho, será empregada a representação de incertezas por polítopos, devido à facilidade na obtenção de condições convexas para a síntese de controladores. Um polítopo é descrito como uma interseção de subespaços, que formam um conjunto convexo, podendo ser caracterizado, completamente, por seus vértices.

Sendo o sistema linear (2.1) discreto no tempo, sujeito a incertezas no modelo, tem-se que a expressão com parâmetros incertos invariantes no tempo pode ser dada por:

$$x_{k+1} = A(\alpha)x_k,$$

em que a matriz  $A(\alpha)$  é determinada pela combinação convexa representada por

$$A(\alpha) = \sum_i^N \alpha_i A_i,$$

sendo o vetor escalar  $\alpha$ , que parametriza o polítopo de incertezas, denotado por  $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]^\top$  pertencente ao simplex unitário, descrito por:

$$\Gamma = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_{(i)} \geq 0, i \in [1, N] \right\}. \quad (2.13)$$

O número de vértices do polítopo de incertezas do sistema é igual a  $2^q$ , sendo  $q$  a quantidade de parâmetros incertos invariantes no tempo à qual o sistema está sujeito.

#### 2.2.6 Síntese de Controladores Saturantes

Sendo o sistema incerto e discreto no tempo, com atraso nos estados e atuadores saturantes, representado conforme a seguir:

$$x_{k+1} = A(\alpha)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d_k} + B(\alpha)\text{sat}(u_k), \quad (2.14)$$

em que o atraso variante no tempo é limitado por  $\underline{d} \in [1, \bar{d}]$  tal que  $d_k \in [\underline{d}, \bar{d}]$ . As matrizes  $A(\alpha)$  e  $A_d(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$  pertencem ao polítopo descrito pela combinação convexa dos  $N$  vértices conhecidos.

$$[A(\alpha) \quad A_d(\alpha) \quad B(\alpha)] = \sum_{i=1}^N \alpha_i [A_i \quad A_{d_i} \quad B_i],$$

sendo  $\alpha$  pertencente ao simplex unitário  $\Gamma$  definido por (2.13).

A função  $\text{sat}(u_k)_{(\ell)}$ , ilustrada na figura 2.2, é vetorial, em que para cada  $\ell \in [1, n_u]$  define-se

$$\text{sat}(u_k)_{(\ell)} = \begin{cases} \bar{u}_{(\ell)}, & \text{se } u_{k(\ell)} > \bar{u}_{(\ell)}, \\ u_{k(\ell)}, & \text{se } \underline{u}_{(\ell)} \leq u_{k(\ell)} \leq \bar{u}_{(\ell)}, \\ \underline{u}_{(\ell)}, & \text{se } u_{k(\ell)} < \underline{u}_{(\ell)} \end{cases}$$

sendo  $\underline{u}_{(\ell)}$  e  $\bar{u}_{(\ell)}$  os limites mínimo e máximo que podem ser aplicados pelo  $\ell$ -ésimo atuador.

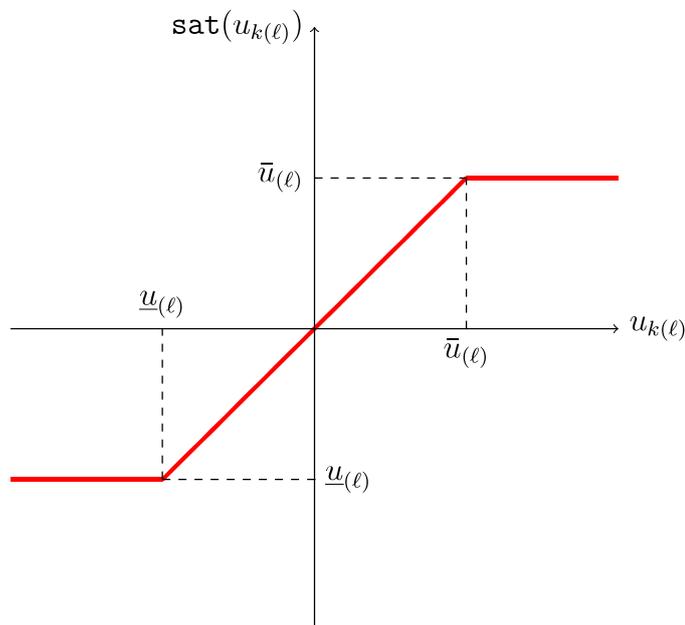


Figura 2.2: Função de saturação  $\text{sat}(u_{k(\ell)})$ , com  $\underline{u}_{(\ell)} = -\bar{u}_{(\ell)}$ .

A lei de controle por realimentação de estados é empregada para estabilizar localmente o sistema (2.14):

$$u_k = Kx_k, \quad (2.15)$$

em que  $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$  representa o ganho do controle a ser calculado.

As ações da saturação geram não linearidades, já que, muitas vezes o sistema demanda uma energia maior que a capacidade do atuador real. Dessa forma, a convergência das trajetórias dos estados para o origem depende das condições iniciais do sistema. Sendo assim, é necessário determinar o conjunto de todas as condições iniciais cujas respectivas trajetórias convergem assintoticamente para origem, ou seja, determinar a região de atração da origem do sistema.

Segundo Tarbouriech *et al.* (2011, p. 14), quando essa região abrange todo o espaço de estados, isto é,  $\mathcal{R}_{\mathcal{A}} = \mathbb{R}^n$  para sistemas sem dependência de atraso, garante-se a estabilidade global assintótica do sistema. No entanto, para sistemas dependentes do atraso e sujeitos a atuadores saturantes, em geral, a convergência para a origem não é garantida para qualquer condição no espaço  $\mathbb{R}^n$ , mas para um determinado sub-conjunto. Dessa forma, garante-se apenas a estabilidade local assintótica do sistema. Além disso, a determinação exata de  $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$  da origem de um sistema pode ser uma tarefa complexa e desafiadora já que a mesma pode não ser convexa, aberta ou limitada. Logo, o objetivo é obter uma estimativa dessa região,  $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ , ou seja, um subconjunto da região de atração, com representação analítica bem definida.

### 2.2.7 Modelagem por não-linearidade de setor

Para tratar a saturação é empregada a modelagem de não linearidade de setor presente em (Gomes da Silva Jr. & Tarbouriech, 2005). Por meio desse método, representa-se o problema a partir da função zona morta apresentada a seguir:

$$\phi(u_k) = \mathbf{sat}(u_k) - u_k \quad (2.16)$$

$$\phi(u_{k(\ell)}) = \begin{cases} u_{k(\ell)} - \bar{u}_{(\ell)}, & \text{se } u_{k(\ell)} > \bar{u}_{(\ell)}, \\ 0, & \text{se } \underline{u}_{(\ell)} \leq u_{k(\ell)} \leq \bar{u}_{(\ell)}, \\ u_{k(\ell)} - \underline{u}_{(\ell)}, & \text{se } u_{k(\ell)} < \underline{u}_{(\ell)}. \end{cases}$$

De acordo com a definição (2.16), tem-se que  $\mathbf{sat}(u_k) = \phi(u_k) + u_k$ , que usado em (2.14) juntamente com (2.15) obtém-se

$$x_{k+1} = (A(\alpha) + B(\alpha)K)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d_k} + B\phi(Kx_k)$$

Conforme apresentado em (Tarbouriech *et al.*, 2011, p. 43), um conjunto poliedral auxiliar é definido para lidar com a saturação presente em (2.14):

$$\mathcal{S} \triangleq \{x_k \in \mathbb{R}^n : |u_k - \omega_k| \leq \bar{u}_{(\ell)}, \forall \ell \in [1, n_u] \text{ e } \underline{u}_{(\ell)} = -\bar{u}_{(\ell)}\}. \quad (2.17)$$

Sendo  $\omega_k \in \mathbb{R}^{n_w}$  um sinal instrumental projetado, como uma variável de folga. O conjunto  $\mathcal{S}$  determina os estados  $x_k$  em que o sinal  $u_k - \omega_k$  não ultrapassa o limite da saturação  $\pm\bar{u}$ . Dessa forma, para um sinal adequado  $\omega_k$ , a condição generalizada de setor é formulada pelo lema apresentado por Gomes da Silva Jr. & Tarbouriech (2005) reproduzido a seguir.

**Lema 2.1 (Condição Generalizada de Setor)** *Considere a função  $\phi(u_k)$ , conforme definido em (2.16). Se  $x_k \in \mathcal{S}$ , então tem-se a relação*

$$\phi(Kx_k)^\top \mathcal{T} [\phi(Kx_k) + \omega_k]_{(\ell)} \leq 0, \forall \ell \in [1, n_u] \quad (2.18)$$

*é válida para qualquer matriz  $\mathcal{T}$  diagonal definida positiva.*

Conforme apresentado por Castro *et al.* (2020), embora o termo  $\omega_k = Gx_k$  seja comumente empregado na literatura, a inclusão de termos correspondentes aos estados atrasados na proposição do sinal  $\omega_k$ , traz uma escolha mais geral podendo gerar resultados menos conservadores. Uma escolha possível é  $\omega_k = Gx_k + G_{\underline{d}}x_{k-\underline{d}} + G_{d_k}x_{k-d_k} + G_{\bar{d}}x_{k-\bar{d}}$ , que será também empregada neste trabalho.

### 2.2.8 Desigualdades Auxiliares

Para as deduções dos teoremas propostos no capítulo seguinte, são empregadas as desigualdades apresentadas nos lemas a seguir, objetivando majorar termos associados aos somatórios de produtos ponderados dos vetores da sequência que caracteriza os estados.

**Lema 2.2 (Desigualdade de Jensen)** *Seja uma matriz definida positiva  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , a seguinte desigualdade pode ser considerada (Jensen, 1906):*

$$\sum_{j=a}^b y_j^\top Z y_j \geq \frac{1}{b-a+1} \left( \sum_{j=a}^b y_j^\top \right) Z \left( \sum_{j=a}^b y_j \right)$$

**Lema 2.3** *Seja  $R = R^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz definida positiva. Se existe uma matriz  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que*

$$\begin{bmatrix} R & X \\ \star & R \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad (2.19)$$

então, a desigualdade a seguir é válida

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\varsigma} R & \mathbf{0} \\ \star & \frac{1}{1-\varsigma} R \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} R & X \\ \star & R \end{bmatrix}, \quad \forall \varsigma \in ]0, 1[.$$

**Prova:** De acordo com (Park *et al.*, 2011), a prova consiste em verificar que

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\varsigma} R & \mathbf{0} \\ \star & \frac{1}{1-\varsigma} R \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1-\varsigma}{\varsigma} R & -X \\ \star & \frac{\varsigma}{1-\varsigma} R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & X \\ \star & R \end{bmatrix},$$

Dessa forma é necessário mostrar que

$$\begin{bmatrix} \frac{1-\varsigma}{\varsigma} R & -X \\ \star & \frac{\varsigma}{1-\varsigma} R \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}. \quad (2.20)$$

Aplicando-se o complemento de Schur em (2.20), obtém-se de forma equivalente

$$\frac{1-\varsigma}{\varsigma} (R - X^\top R^{-1} X) \geq \mathbf{0}.$$

Sendo  $\varsigma \in ]0, 1[$  nota-se que  $\frac{1-\varsigma}{\varsigma}$  é positivo. Além disso, pela aplicação do complemento de Schur, a desigualdade  $(R - X^\top R^{-1} X) \geq \mathbf{0}$  é equivalente a (2.19). ■

## 2.3 Considerações Finais

Neste capítulo foram abordadas as principais considerações teóricas necessárias para o desenvolvimento e melhor compreensão deste trabalho. Dentre essas: estabilidade no sentido de Lyapunov, estabilidade de sistemas com atraso nos estados, tanto no sentido global quanto local, estabilidade entrada-estado (ISS), estimativa do ganho  $\ell_2$ , controladores saturantes e condição generalizada de setor. No Capítulo 3, é apresentada uma descrição do problema a ser tratado, além das condições convexas desenvolvidas. Estas por sua vez, determinam os ganhos do controlador robusto que garante a estabilidade assintótica local e estabilidade entrada-estado, a partir da escolha adequada da candidata a função de Lyapunov-Krasovskii.

## Estabilização Entrada Estado

Neste capítulo são apresentadas novas condições convexas para síntese de controladores por realimentação de estados para uma classe de sistemas discretos no tempo, sujeitos a atrasos nos estados, atuadores saturantes e perturbação limitada em energia. Essas condições tratam sinais exógenos limitados em energia a partir da análise de estabilidade entrada-estado (ISS) e do ganho  $\ell_2$  entre a saída de interesse e a entrada de perturbação. Neste trabalho utiliza-se a mesma candidata a função de Lyapunov-Krasovskii apresentada em Castro *et al.* (2020), porém são desenvolvidas novas condições para considerar incertezas politópicas do sistema.

As condições propostas são adequadas à utilização dos procedimentos de otimização convexa, os quais serão explorados no próximo capítulo. Além disso, a caracterização geométrica da região  $\mathcal{R}_\varepsilon$  será explorada no capítulo seguinte, logo, assume-se a representação da mesma a partir da abordagem algébrica.

### 3.1 Formulação do Problema

Seja o sistema incerto e discreto no tempo, com atraso, variante no tempo, presente nos estados, entradas de controle saturantes e perturbação limitada em energia, tal que

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(\alpha)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d_k} + B(\alpha)\mathbf{sat}(u_k) + B_{w_k}(\alpha)w_k, \\ z_k &= C(\alpha)x_k + C_d(\alpha)x_{k-d_k} + D(\alpha)\mathbf{sat}(u_k) + D_{w_k}(\alpha)w_k, \end{aligned} \quad (3.1)$$

sujeito à condição inicial  $\varphi_{(\bar{d},0)} = \{x_{-\bar{d}}, x_{-\bar{d}+1}, \dots, x_0\}$ , em que  $x_k \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor de estados atuais,  $z_k \in \mathbb{R}^{n_z}$  é a saída regulada do sistema,  $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$  representa o sinal de controle,  $\mathbf{sat}(u_k)$  é uma função de saturação vetorial descentralizada fornecida por (2.15). Os limites mínimo e máximo de  $u_{k(\ell)}$  são dados por  $\underline{u}_{(\ell)} = -\bar{u}_{(\ell)}$ ,  $\ell \in [1, n_u]$ , os quais são aplicados pelo  $\ell$ -ésimo atuador,  $w_k \in \mathbb{R}^{n_w}$  representa o vetor do sinal exógeno, pertencente ao conjunto  $\mathcal{P}$  apresentado em (2.8) e repetido abaixo para conveniência do leitor:

$$\mathcal{P} \triangleq \{w \in \mathbb{R}^{n_w} : \|w\|_2^2 \leq \delta^{-1}\}, \quad (3.2)$$

em que  $\delta^{-1} \in \mathbb{R}^+$  corresponde ao limite máximo de energia da perturbação. O atraso  $d_k$  variante no tempo assume valores inteiros no intervalo  $0 < \underline{d} \leq d_k \leq \bar{d} < \infty$ .

As matrizes  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_{di} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ ,  $B_{wi} \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ ,  $C_{di} \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ ,  $D_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$  e  $D_{wi} \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w}$  representam  $N$  vértices do politopo, definidas por:

$$\begin{bmatrix} A & A_d & B & B_w \\ C & C_d & D & D_w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \begin{bmatrix} A_i & A_{di} & B_i & B_{wi} \\ C_i & C_{di} & D_i & D_{wi} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Além disso,  $\alpha$  é o vetor de parâmetro incerto invariante no tempo, pertencente ao simplex unitário determinado por (2.13), isto é,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ .

A lei de controle empregada neste trabalho para estabilizar o sistema (3.1)-(3.3) é dada por

$$u_k = Kx_k, \quad (3.4)$$

em que  $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$  é a matriz de ganho de realimentação de estado do controlador. Portanto, usando essa lei de controle de realimentação de estado (3.4) no sistema (3.1), obtém-se o seguinte sistema de malha fechada:

$$\begin{cases} x_{k+1} &= A(\alpha)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d_k} + B(\alpha)\text{sat}(Kx_k) + B_w(\alpha)w_k, \\ z_k &= C(\alpha)x_k + C_d(\alpha)x_{k-d_k} + D(\alpha)\text{sat}(Kx_k) + D_w(\alpha)w_k. \end{cases} \quad (3.5)$$

Devido à saturação dos atuadores, a qual limita a energia real que a ação de controle pode aplicar no sistema, não se é possível garantir a estabilidade global dos sistemas, se eles forem instáveis em malha aberta. Portanto, é necessário lidar com a estabilização local, para a determinação da região de atração  $\mathcal{R}_A$ . A determinação de tal região não é uma tarefa fácil em geral (Tarbouriech *et al.*, 2011, p. 14). Uma nova metodologia para determinar a região estimada de atração  $\mathcal{R}_E \subseteq \mathcal{R}_A$  é apresentada ao longo desta seção. Além disso, o vetor de entrada de perturbação é considerado na análise de estabilidade local do sistema em malha fechada (3.5). Consequentemente, emprega-se a estabilidade entrada-estado (ISS), sendo a definição da mesma, adaptada de (Leite *et al.*, 2020, p. 357-366), apresentada a seguir.

**Definição 3.1** *O sistema incerto em malha fechada (3.5), com a lei de controle (3.4), é dito estável de entrada para estado (ISS) se para todo escalar positivo  $\delta$ , quaisquer sequências de  $w \in \mathcal{P}$ ,  $\varphi(\bar{d}, 0) \in \mathcal{R}_{\varepsilon_0}$  e para todo  $\alpha \in \Gamma$ , todas as trajetórias de estado resultantes permanecem limitadas em  $\mathcal{R}_A$  e convergem para a origem, conforme a sequência  $w_k$  diminuiu, para qualquer  $k \geq 0$ .*

Na sequência, é apresentado o problema que será tratado nesse trabalho.

**Problema 3.1** *Considere o sistema incerto discreto no tempo sujeito a atraso variante no tempo, atuadores saturantes e perturbação limitada em energia dado por (3.1)-(3.3).*

Determine os ganhos do controlador robusto, por realimentação de estados (3.4), que garantam, para um conjunto de condições iniciais  $\mathcal{R}_\mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}_\mathcal{A}$  e um conjunto de sinais exógenos  $w \in \mathcal{P}$  admissíveis, a estabilidade entrada-estado (ISS) do sistema em malha fechada (3.5). Além disso, o controlador, projetado por realimentação de estados, deve garantir um certo limite superior do ganho  $\ell_2$ , entre a entrada de perturbação  $w$  e a saída regulada  $z$ , de modo que

$$\|z\|_2 \leq \gamma(\|w\|_2 + \mathcal{B}),$$

em que as condições iniciais em  $\mathcal{R}_\mathcal{E}$  produzem o termo  $\mathcal{B} \geq 0$ .

## 3.2 Resultados Preliminares

Abordam-se os atuadores saturantes a partir da condição generalizada de setor apresentada em (2.18), proposta por Gomes da Silva Jr. & Tarbouriech (2005). Para isso, a não linearidade da saturação é tratada como zona morta  $\phi(u_k)$ . Conforme apresentado no Lema 2.1, é possível escrever a saturação como  $\text{sat}(u_k) = \phi(u_k) + u_k$ , fornecendo o seguinte sistema em malha fechada:

$$\begin{cases} x_{k+1} &= (A(\alpha) + B(\alpha)K)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d_k} + B(\alpha)\phi(Kx_k) + B_w(\alpha)w_k, \\ z_k &= C(\alpha)x_k + C_d(\alpha)x_{k-d_k} + D(\alpha)\phi(Kx_k) + D_w(\alpha)w_k. \end{cases} \quad (3.6)$$

Dessa forma, (3.6) representa uma reescrita na formulação do modelo do sistema apresentado em (3.5).

### 3.2.1 Candidata a Função de Lyapunov-Krasovskii

É empregada a mesma função candidata de Lyapunov-Krasovskii (L-K) proposta por (Castro *et al.*, 2020), apresentada a seguir:

$$V(\bar{x}_k) = V_1(x_k) + V_2(\bar{x}_k) + V_3(\bar{x}_k), \quad (3.7)$$

em que,

$$V_1(x_k) = x_k^\top \bar{P} x_k, \quad (3.8)$$

$$V_2(\bar{x}_k) = \sum_{i=k-d}^{k-1} x_i^\top \bar{Q}_1 x_i + \sum_{i=k-\bar{d}}^{k-d-1} x_i^\top \bar{Q}_2 x_i, \quad (3.9)$$

$$V_3(\bar{x}_k) = \underline{d} \sum_{i=1-\underline{d}}^0 \sum_{j=k+i}^k y_j^\top \bar{Z}_1 y_j + (\bar{d} - \underline{d}) \sum_{i=1-\bar{d}}^{-\underline{d}} \sum_{j=k+i}^k y_j^\top \bar{Z}_2 y_j, \quad (3.10)$$

com

$$y_j = x_j - x_{j-1}, \quad (3.11)$$

o vetor de estados aumentados determinado por

$$\bar{x}_k = [x_k^\top \quad x_{k-1}^\top \quad x_{k-2}^\top \quad \cdots \quad x_{k-\bar{d}}^\top]^\top. \quad (3.12)$$

e as matrizes definidas positivas  $\bar{P}, \bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2 \in \mathbb{R}^n$ .

$V(\bar{x}_k)$  é uma função L-K se afirmações apresentadas no Teorema 2.2 forem verificadas, repetidas a seguir para conveniência do leitor.

$$\kappa_1(\|\bar{x}_0\|^2) \leq V(\bar{x}_k) \leq \kappa_2(\|\bar{x}_k\|^2), \quad (3.13)$$

$$\Delta V(\bar{x}_k) = V(\bar{x}_{k+1}) - V(\bar{x}_k) \leq -\kappa_3(\|\bar{x}_0\|^2), \quad (3.14)$$

para  $\bar{x}_k \in \mathcal{R}_A$  e as funções  $\kappa_1, \kappa_2$  e  $\kappa_3$  de classe  $\mathcal{K}$ .

Para calcular a variação da função de Lyapunov-Krasovskii entre dois instantes, expressa-se a variação de cada um dos termos, tal qual a seguir:

$$\Delta V_1(x_k) = x_{k+1}^\top \bar{P} x_{k+1} - x_k^\top \bar{P} x_k, \quad (3.15)$$

$$\Delta V_2(\bar{x}_k) = x_k^\top \bar{Q}_1 x_k - x_{k-\underline{d}}^\top (\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2) x_{k-\underline{d}} - x_{k-\bar{d}}^\top \bar{Q}_2 x_{k-\bar{d}}, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_3(\bar{x}_k) &= y_{k+1}^\top (\underline{d}^2 \bar{Z}_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 \bar{Z}_2) y_{k+1} \\ &\quad - \underbrace{\underline{d} \sum_{i=k-\underline{d}+1}^k y_i^\top \bar{Z}_1 y_i}_{S_1} - \underbrace{(\bar{d} - \underline{d}) \sum_{i=k-\bar{d}+1}^{k-\underline{d}} y_i^\top \bar{Z}_2 y_i}_{S_2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Nota-se que (3.15) e (3.16), dependem apenas dos vetores de estados  $x_k, x_{k-\underline{d}}$  e  $x_{k-\bar{d}}$ , enquanto (3.17) deve ser ajustado para evitar a dependência de todos os vetores  $x_{k-j}, j \in [0, \bar{d}]$ . Sendo assim, a desigualdade de Jensen, (Jensen, 1906), veja Lema 2.2, pode ser aplicada nos dois termos com somatório de  $\Delta V_3(\bar{x}_k)$ : em  $S_1$  de forma direta, e em  $S_2$  após dividir o somatório em duas partes, explicitando dessa forma, o termo dependente de  $x_{k-\underline{d}}$ , conforme proposto por Castro *et al.* (2020). Aplicando a desigualdade de Jensen em  $S_1$  tem-se

$$\underline{d} \sum_{j=k-\underline{d}+1}^k y_j^\top \bar{Z}_1 y_j \geq \left( \sum_{j=k-\underline{d}+1}^k y_j^\top \right) \bar{Z}_1 \left( \sum_{j=k-\underline{d}+1}^k y_j \right). \quad (3.18)$$

Utilizando-se (3.11) pode-se reescrever o lado direito da equação (3.18) como

$$\left( \sum_{j=k-\underline{d}+1}^k x_j^\top - \sum_{j=k-\underline{d}+1}^k x_{j-1}^\top \right) \bar{Z}_1 \left( \sum_{j=k-\underline{d}+1}^k x_j - \sum_{j=k-\underline{d}+1}^k x_{j-1} \right).$$

Reescrevendo-se os índices em termos de  $x_j$  obtém-se

$$\underline{d} \sum_{j=k-\underline{d}+1}^k y_j^\top \bar{Z}_1 y_j \geq \left( \sum_{j=k-\underline{d}+1}^k x_j^\top - \sum_{j=k-\underline{d}}^{k-1} x_j^\top \right) \bar{Z}_1 \left( \sum_{j=k-\underline{d}+1}^k x_j - \sum_{j=k-\underline{d}}^{k-1} x_j \right),$$

em que  $\left(\sum_{j=k-\underline{d}+1}^k x_j^\top - \sum_{j=k-\underline{d}}^{k-1} x_j^\top\right)$ , pode ser simplificado em  $(x_k - x_{k-\underline{d}})^\top$ , resultando em um majorante para  $S_1$

$$S_1 = \underline{d} \sum_{j=k-\underline{d}+1}^k y_j^\top \bar{Z}_1 y_j \geq (x_k - x_{k-\underline{d}})^\top \bar{Z}_1 (x_k - x_{k-\underline{d}}). \quad (3.19)$$

De forma análoga, majora-se  $S_2$ , dividindo-se o mesmo em dois somatórios, para explicitar o termo dependente do instante  $k - d_k$ . Logo, obtém-se:

$$S_2 = (\bar{d} - \underline{d}) \left[ \sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} y_j^\top \bar{Z}_2 y_j + \sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} y_j^\top \bar{Z}_2 y_j \right].$$

Aplicando-se a desigualdade de Jensen, Lema 2.2, obtém-se

$$S_2 \leq (\bar{d} - \underline{d}) \left[ \frac{1}{(\bar{d} - d_k)} \left( \sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} y_j^\top \right) \bar{Z}_2 \left( \sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} y_j \right) + \frac{1}{(d_k - \underline{d})} \left( \sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} y_j^\top \right) \bar{Z}_2 \left( \sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} y_j \right) \right]. \quad (3.20)$$

A partir de (3.11) pode-se reescrever (3.20) como

$$S_2 \leq (\bar{d} - \underline{d}) \left[ \frac{1}{(\bar{d} - d_k)} \left( \sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} x_j^\top - \sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} x_{j-1}^\top \right) \bar{Z}_2 \left( \sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} x_j - \sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} x_{j-1} \right) + \frac{1}{(d_k - \underline{d})} \left( \sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} x_j^\top - \sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} x_{j-1}^\top \right) \bar{Z}_2 \left( \sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} x_j - \sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} x_{j-1} \right) \right].$$

Escrevendo os índices em termos de  $x_j$  tem-se

$$S_2 \leq (\bar{d} - \underline{d}) \left[ \frac{1}{(\bar{d} - d_k)} \left( \sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} x_j^\top - \sum_{j=k-\bar{d}}^{k-d_k-1} x_j^\top \right) \bar{Z}_2 \left( \sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} x_j - \sum_{j=k-\bar{d}}^{k-d_k-1} x_j \right) + \frac{1}{(d_k - \underline{d})} \left( \sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} x_j^\top - \sum_{j=k-d_k}^{k-\underline{d}-1} x_j^\top \right) \bar{Z}_2 \left( \sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} x_j - \sum_{j=k-d_k}^{k-\underline{d}-1} x_j \right) \right]. \quad (3.21)$$

Dessa forma, reescrevendo os somatórios com os mesmos limites, pode-se simplificar (3.21) em

$$(\bar{d} - \underline{d}) \left[ \frac{1}{(\bar{d} - d_k)} (x_{k-d_k} - x_{k-\bar{d}})^\top \bar{Z}_2 (x_{k-d_k} - x_{k-\bar{d}}) + \frac{1}{(d_k - \underline{d})} (x_{k-\underline{d}} - x_{k-d_k})^\top \bar{Z}_2 (x_{k-\underline{d}} - x_{k-d_k}) \right], \quad (3.22)$$

de forma análoga à realizada para o termo  $S_1$ . Definindo-se

$$\varsigma = \frac{d_k - \underline{d}}{\bar{d} - \underline{d}},$$

tem-se que

$$\frac{1}{1 - \varsigma} = \frac{\bar{d} - \underline{d}}{\bar{d} - d_k} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\varsigma} = \frac{\bar{d} - \underline{d}}{d_k - \underline{d}},$$

podem reescrever (3.22) como

$$\frac{1}{1 - \varsigma} (x_{k-d_k} - x_{k-\bar{d}})^\top \bar{Z}_2 (x_{k-d_k} - x_{k-\bar{d}}) + \frac{1}{\varsigma} (x_{k-\underline{d}} - x_{k-d_k})^\top \bar{Z}_2 (x_{k-\underline{d}} - x_{k-d_k}), \quad (3.23)$$

e definindo  $\Omega_k = \begin{bmatrix} x_{k-\underline{d}} - x_{k-d_k} \\ x_{k-d_k} - x_{k-\bar{d}} \end{bmatrix}$ , (3.23) pode ser expressa por

$$S_2 \geq \Omega_k^\top \begin{bmatrix} \frac{1}{\varsigma} \bar{Z}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{1-\varsigma} \bar{Z}_2 \end{bmatrix} \Omega_k. \quad (3.24)$$

Empregando-se o Lema 2.3, (3.24) pode ser reescrita como

$$S_2 \geq \Omega_k^\top \begin{bmatrix} \frac{1}{\varsigma} \bar{Z}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{1-\varsigma} \bar{Z}_2 \end{bmatrix} \Omega_k \geq \Omega_k^\top \begin{bmatrix} \bar{Z}_2 & X \\ \star & \bar{Z}_2 \end{bmatrix} \Omega_k,$$

escolhendo-se  $X = -\bar{Z}_2$ , para obter

$$S_2 \geq \Omega_k^\top \begin{bmatrix} \bar{Z}_2 & -\bar{Z}_2 \\ \star & \bar{Z}_2 \end{bmatrix} \Omega_k,$$

que substituindo-se  $\Omega_k$  tem-se

$$S_2 \geq (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}})^\top \bar{Z}_2 (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}})$$

Dessa forma, é possível obter um majorante para  $S_2$ , tal qual:

$$S_2 \geq (\bar{d} - \underline{d}) \sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-\underline{d}} y_j^\top \bar{Z}_2 y_j \geq (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}})^\top \bar{Z}_2 (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}}). \quad (3.25)$$

Logo, a partir de (3.19) e (3.25) é possível reescrever (3.17) como

$$\begin{aligned} \Delta V_3(\bar{x}_k) &\leq y_{k+1}^\top (\underline{d}^2 \bar{Z}_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 \bar{Z}_2) y_{k+1} - (x_k - x_{k-\underline{d}})^\top \bar{Z}_1 (x_k - x_{k-\underline{d}}) \\ &\quad - (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}})^\top \bar{Z}_2 (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}}). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Dessa forma, determina-se  $\Delta V(\bar{x}_k) = \Delta V_1(x_k) + \Delta V_2(\bar{x}_k) + \Delta V_3(\bar{x}_k)$  a partir de (3.15-3.16) como

$$\begin{aligned} \Delta V(\bar{x}_k) &= x_{k+1}^\top \bar{P} x_{k+1} - x_k^\top \bar{P} x_k + x_k^\top \bar{Q}_1 x_k - x_{k-\underline{d}}^\top (\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2) x_{k-\underline{d}} - x_{k-\bar{d}}^\top \bar{Q}_2 x_{k-\bar{d}} \\ &\quad + y_{k+1}^\top (\underline{d}^2 \bar{Z}_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 \bar{Z}_2) y_{k+1} - \underline{d} \sum_{i=k-\underline{d}+1}^k y_i^\top \bar{Z}_1 y_i - (\bar{d} - \underline{d}) \sum_{i=k-\bar{d}+1}^{k-\underline{d}} y_i^\top \bar{Z}_2 y_i. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Utilizando a desigualdade apresentada em (3.26) tem-se que

$$\begin{aligned} \Delta V(\bar{x}_k) \leq & x_{k+1}^\top \bar{P} x_{k+1} - x_k^\top \bar{P} x_k + x_k^\top \bar{Q}_1 x_k - x_{k-\underline{d}}^\top (\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2) x_{k-\underline{d}} - x_{k-\bar{d}}^\top \bar{Q}_2 x_{k-\bar{d}} \\ & + y_{k+1}^\top (\underline{d}^2 \bar{Z}_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 \bar{Z}_2) y_{k+1} - (x_k - x_{k-\underline{d}})^\top \bar{Z}_1 (x_k - x_{k-\underline{d}}) \\ & - (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-\underline{d}k} + x_{k-\bar{d}})^\top \bar{Z}_2 (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-\underline{d}k} + x_{k-\bar{d}}). \end{aligned}$$

Por fim, para sistemas dependentes de parâmetros incertos invariantes no tempo, o funcional de Lyapunov-Krasovskii é denotado por  $V(\bar{x}_k, \alpha)$  com as matrizes  $\bar{P}(\alpha)$ ,  $\bar{Q}_1(\alpha)$ ,  $\bar{Q}_2(\alpha)$ ,  $\bar{Z}_1(\alpha)$ ,  $\bar{Z}_2(\alpha)$ .

### 3.2.2 Caracterização Algébrica da Região de Atração

A caracterização geométrica da estimativa da região de atração ( $\mathcal{R}_\mathcal{E}$ ), será explorada no capítulo seguinte. O Lema a seguir apresenta a caracterização algébrica da estimativa da região de atração.

**Lema 3.1** *Se  $V(\bar{x}_k)$  é uma função L-K, assegurando a estabilidade robusta local do sistema (3.6), então o conjunto  $\mathcal{R}_\mathcal{E}$  pode ser definido em termos das curvas de nível de  $V(\bar{x})$ ,  $\mathcal{L}_\mathcal{V}(\eta)$ , como segue:*

$$\mathcal{R}_\mathcal{E} = \mathcal{L}_\mathcal{V}(\eta) = \{\bar{x}_k \in \mathbb{R}^{n(\bar{d}+1)}; V(\bar{x}_k) \leq \eta^{-1}\}, \quad (3.28)$$

sendo que  $\bar{x}_k$  representa o vetor de estado aumentado dado por (3.12) e  $\eta^{-1}$  a energia total que o sistema admite, dada pela soma das energias  $\beta^{-1}$  e  $\delta^{-1}$ , das condições iniciais e perturbações admissíveis, respectivamente.

## 3.3 Projeto do controlador por realimentação de estado

Nesta seção são apresentadas duas condições desenvolvidas que provêm uma solução ao Problema 3.1. A primeira delas é determinada por meio da desigualdade de Jensen e majorações dos termos de L-K, e a introdução de um relaxamento a partir da variável escalar  $\varepsilon$ . Já a segunda abordagem permite que as matrizes do funcional de L-K, apresentado em (3.7), sejam dependentes de parâmetros, o que pode resultar em soluções menos conservadoras determinadas a partir da solução equivalente fornecida através do Lema de Finsler.

A primeira condição foi desenvolvida a partir do Teorema 2, apresentado em (Castro *et al.* (2020)), de maneira a relaxar a condição de estabilidade assintótica, adotando-se a estabilidade entrada estado (ISS). Dessa forma, para sintetizar um controlador por realimentação de estados (3.4), que garanta que as trajetórias do sistema (3.6) sejam limitadas para qualquer perturbação em (3.2) e garanta um determinado limite superior

do ganho  $\ell_2$  entre a entrada de perturbação  $w_k$  e a saída regulada  $z_k$ , ou seja, a solução do Problema 3.1, segue o Teorema:

**Teorema 3.1 (Projeto de Controle)** *Considere o sistema (3.1). Se existem as matrizes simétricas, definidas positivas,  $W > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_1 > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_2 > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z_1 > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $Z_2 > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $L \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ ,  $G_{\underline{d}} \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ ,  $G_{d_k} \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ ,  $G_{\bar{d}} \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ , uma matriz diagonal, definida positiva,  $\mathcal{T} > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ , e os escalares  $\varepsilon \in ]0, 2]$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\eta > 0$  e  $\delta > 0$ , que satisfazem:*

$$\begin{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \Theta_{1i} & \mathbf{0}_{4n+n_u \times n_w} \\ \star & \mathbf{0}_{n_w} \end{bmatrix} + \text{He} (F_{b1}^\top \Phi_{3i}^\top) - F_6^\top F_6 \right) & \begin{bmatrix} \Theta_{2i} \\ (B_{wi})^\top \\ \Theta_3 \\ \star \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} F_{zi}^\top \\ \mathbf{0}_{n \times n_u} \\ -\gamma^2 \mathbf{I}_{n_u} \end{bmatrix} \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \forall i \in [1, N], \quad (3.29)$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} W & \mathbf{0}_{n \times 3n} \\ \star & Q_1 \end{bmatrix} & ([L \ \mathbf{0}_{3n_u \times n}] - \mathcal{G})_{(\ell)}^\top \\ \star & \eta \bar{u}_\ell^2 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \forall \ell \in [1, n_u], \quad (3.30)$$

$$\eta - \delta < 0,$$

sendo,

$$\begin{aligned} \Theta_{1i} &= \left( \text{He} (F_1^\top \Theta_{2i}^\top - F_5^\top \mathcal{G}_{(\ell)} \Xi) + Q_2 - 2F_5^\top \mathcal{T} F_5 - \Pi^\top \begin{bmatrix} Z_1 & \mathbf{0}_n \\ \star & Z_2 \end{bmatrix} \Pi \right) \\ \Theta_{2i} &= [A_i W + B_i L - W \ \mathbf{0}_n \ A_{di} W \ \mathbf{0}_n \ B_i \mathcal{T}]^\top, \\ \Theta_3 &= \varepsilon^2 (\underline{d}^2 Z_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 Z_2) - (2\varepsilon - \varepsilon^2) W, \end{aligned}$$

$$Q_1 = \text{diag}(Q_1, Q_2, Q_2), \quad Q_2 = \text{diag}(Q_1, -Q_1 + Q_2, \mathbf{0}_n, -Q_2, \mathbf{0}_{n_u}),$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & -\mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times n_u} \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n & -2\mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{n \times n_u} \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times n_u} \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_{n \times n_u} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{G}_{(\ell)} = [G_{(\ell)} \ G_{\underline{d}(\ell)} \ G_{d_k(\ell)} \ G_{\bar{d}(\ell)}], \quad \Xi = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times n_u} \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times n_u} \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times n_u} \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{n \times n_u} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} F_{z_i} &= [C_i \ \mathbf{0}_{n_u \times n} \ C_{d_i} \ \mathbf{0}_{n_u \times n} \ D_i \ D_{w_i}], \quad F_{b1} = [\mathbf{I}_n \ \mathbf{0}_n \ \mathbf{0}_n \ \mathbf{0}_n \ \mathbf{0}_{n \times n_u} \ \mathbf{0}_{n \times n_w}], \\ \Phi_{3i} &= [\mathbf{0}_n \ \mathbf{0}_n \ \mathbf{0}_n \ \mathbf{0}_n \ \mathbf{0}_{n \times n_u} \ B_{w_i}]^\top, \quad F_6 = [\mathbf{0}_n \ \mathbf{0}_n \ \mathbf{0}_n \ \mathbf{0}_n \ \mathbf{0}_{n \times n_u} \ \mathbf{I}_{n \times n_w}], \end{aligned}$$

então, o sistema em malha fechada (3.6), com ganho robusto de realimentação de estados dado por

$$K = LW^{-1},$$

é tal que

1. Se  $w_k \neq \mathbf{0}$  com  $w \in \mathcal{P}$  :

(a) as trajetórias do sistema (3.6) permanecem limitadas em  $\mathcal{L}_V(\eta) \subset \mathcal{R}_A$  para todo  $\bar{x}_0$  pertencente ao conjunto  $\mathcal{R}_{\varepsilon_0} = \mathcal{L}_V(\beta)$  com  $V(\bar{x}_k) \leq \|w\|_2^2 + V(\bar{x}_0) \leq \delta^{-1} + \beta^{-1} = \eta^{-1}$ , para todo  $k > 0$ ;

(b) para  $k \rightarrow \infty$ ,  $\|z_k\|_2^2 < \gamma^2(\|w\|_2^2 + V(\bar{x}_0))$ .

2. Se  $w_k = \mathbf{0}$  para todo  $k \geq \bar{k} \geq 0$ , então  $\bar{x}_k \rightarrow \mathbf{0}$  sem deixar  $\mathcal{R}_\varepsilon$  conforme  $k \rightarrow \infty$ .

**Prova:** Inicialmente, pré e pós-multiplicando (3.29) por  $\text{diag}(\mathbf{I}_{5n}, \mathbf{0}_n, \mathbf{I}_{n_u}, \mathbf{0}_{n_w})$  e seu transposto, respectivamente, para  $\eta = 1$  em (3.30), obtém-se as desigualdades (16) e (17) do Teorema 1 de (Castro *et al.*, 2020).

Se a LMI (3.29) é verificada, então a positividade de (3.7) é garantida e tem-se que  $V(\bar{x}_k) > 0$  para  $\bar{x}_0 \neq 0$ . Além disso,  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$  são regulares, isto é, possuem inversa representadas por  $W^{-1}$  e  $\mathcal{T}^{-1}$  respectivamente. Sendo assim, aplicando-se o complemento de Schur em relação ao termo  $-\gamma^2 \mathbf{I}_{n_u}$  de (3.29) obtém-se

$$\begin{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \Theta_{1i} & \mathbf{0} \\ \star & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \text{He} (F_{b1}^\top \Phi_{3i}^\top) - F_6^\top F_6 \right) & \begin{bmatrix} \Theta_{2i} \\ (B_{wi})^\top \end{bmatrix} \\ \star & \Theta_3 \end{bmatrix} + [F_{zi} \ \mathbf{0}]^\top \gamma^{-2} [F_{zi} \ \mathbf{0}] < \mathbf{0}, \forall i \in [1, N]. \quad (3.31)$$

Tomando-se  $\Psi_{1i} = \left( \begin{bmatrix} \Theta_{1i} & \mathbf{0} \\ \star & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \text{He} (F_{b1}^\top \Phi_{3i}^\top) - F_6^\top F_6 \right)$  e  $\Psi_{2i} = [\Theta_{2i}^\top \ B_{wi}]^\top$  e agrupando-se os termos relacionados à  $\gamma$  na mesma posição que  $\Psi_{1i}$ , a LMI (3.31) pode ser reescrita por

$$\begin{bmatrix} \Psi_{1i} + F_{zi}^\top \gamma^{-2} F_{zi} & \Psi_{2i} \\ \star & \Theta_3 \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \forall i \in [1, N]. \quad (3.32)$$

Para recuperar os termos apresentados em  $\Theta_3$  sem a relação de  $\varepsilon$ , é necessário retomar a desigualdade a seguir

$$\Theta_3 = -2\varepsilon W + \varepsilon^2 (W + \underline{d}^2 \bar{Z}_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 \bar{Z}_2) \geq -W (W + \underline{d}^2 \bar{Z}_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 \bar{Z}_2)^{-1} W. \quad (3.33)$$

Escolhendo-se  $(W - \varepsilon Y) Y^{-1} (W - \varepsilon Y) \geq \mathbf{0}$ , para qualquer escalar  $\varepsilon$ , qualquer matriz regular  $Y = W + \underline{d}^2 Z_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 Z_2$  e adotando-se a representação

$$\bar{Y} = W Y^{-1} W, \quad (3.34)$$

pode-se reescrever a desigualdade (3.33) como

$$\Theta_3 \geq -\bar{Y}. \quad (3.35)$$

Substituindo-se (3.35) em (3.32) e multiplicando (3.32) por  $\alpha_{(i)}$  e somando para  $i \in [1, N]$ , obtém-se

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \alpha_{(i)} (\Psi_{1i} + F_{zi}^\top \gamma^{-2} F_{zi}) & \sum_{i=1}^N \alpha_{(i)} \Psi_{2i} \\ \star & -\bar{Y} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (3.36)$$

Aplicando-se o complemento de Schur em relação ao termo  $-\bar{Y}$  de (3.36), é possível reescrever a LMI como:

$$\hat{\Theta} = \sum_{i=1}^N \alpha_{(i)} \Psi_{1_i} + \sum_{i=1}^N F_{zi}^\top \gamma^{-2} F_{zi} + \left( \sum_{i=1}^N \alpha_{(i)} \Psi_{2_i} \right)^\top \bar{Y}^{-1} \left( \sum_{i=1}^N \alpha_{(i)} \Psi_{2_i} \right) < \mathbf{0}. \quad (3.37)$$

Tomando-se os vetores aumentados definidos por,

$$\zeta_k = \begin{bmatrix} \rho_k \\ \mathcal{T}^{-1} \phi(Kx_k) \\ w_k \end{bmatrix}, \quad \rho_k = \begin{bmatrix} W^{-1} x_k \\ W^{-1} x_{k-\underline{d}} \\ W^{-1} x_{k-d_k} \\ W^{-1} x_{k-\bar{d}} \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

com  $\sum_{i=1}^N \alpha_i \Psi_{1_i} = \Psi_1(\alpha)$  e as matrizes

$$\begin{aligned} \Psi_1(\alpha) &= \begin{bmatrix} \text{He} (F_1^\top \Theta_2(\alpha)^\top - F_5^\top \mathcal{G}_{(\ell)} \Xi) + \mathcal{Q}_2 - 2F_5^\top \mathcal{T} F_5 - \Pi^\top \begin{bmatrix} Z_1 & \mathbf{0} \\ \star & Z_2 \end{bmatrix} \Pi & \mathbf{0} \\ \star & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &\quad + \text{He} (F_{b1}^\top \Phi_3(\alpha)^\top) - F_6^\top F_6, \\ \Theta_2(\alpha) &= [A(\alpha)W + B(\alpha)KW - W \quad \mathbf{0} \quad A(\alpha)W \quad \mathbf{0} \quad B(\alpha)\mathcal{T}]^\top, \\ \Psi_2(\alpha) &= [\Theta_2(\alpha)^\top \quad B_w(\alpha)]^\top, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i \Psi_{2_i} \zeta_k = y_{k+1}, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i F_{zi} \zeta_k = z_k, \end{aligned}$$

através de (3.34) com

$$\bar{Y}^{-1} = W^{-1} Y W^{-1} = W^{-1} (W + \underline{d}^2 Z_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 Z_2) W^{-1}$$

e a partir de (3.37), tem-se que  $\zeta_k^\top \hat{\Theta} \zeta_k$

$$\begin{aligned} \zeta_k^\top \Psi_1(\alpha) \zeta_k + y_{k+1}^\top (W^{-1} + \underline{d}^2 W^{-1} Z_1 W^{-1} + (\bar{d} - \underline{d})^2 W^{-1} Z_2 W^{-1}) y_{k+1} \\ + z_k^\top \gamma^{-2} z_k < \mathbf{0}. \quad (3.39) \end{aligned}$$

Analisando-se o termo  $\zeta_k^\top \Psi_1(\alpha) \zeta_k$ , com a expansão a partir da transformação fornecida por (3.38), para  $\omega_k = \mathcal{G}_{(\ell)} \rho_k$  e  $F_6 \zeta_k = w_k$  é possível obter

$$\begin{aligned} \zeta_k^\top \Psi_1(\alpha) \zeta_k &= x_{k+1}^\top W^{-1} W W^{-1} x_{k+1} - x_k^\top W^{-1} W W^{-1} x_k + x_k^\top W^{-1} Q_1 W^{-1} x_k \\ &\quad + x_{k-\underline{d}}^\top W^{-1} (Q_2 - Q_1) W^{-1} x_{k-\underline{d}} - x_{k-\bar{d}}^\top W^{-1} Q_2 W^{-1} x_{k-\bar{d}} - x_k^\top W^{-1} Z_1 W^{-1} x_k \\ &\quad - x_{k-\underline{d}}^\top W^{-1} (Z_1 - Z_2) W^{-1} x_{k-\underline{d}} + x_{k-d_k}^\top W^{-1} 4Z_2 W^{-1} x_{k-d_k} - x_{k-\bar{d}}^\top W^{-1} Z_2 W^{-1} x_{k-\bar{d}} \\ &\quad + x_{k-\underline{d}}^\top W^{-1} Z_1 W^{-1} x_k + x_k^\top W^{-1} Z_1 W^{-1} x_{k-\underline{d}} + x_{k-\underline{d}}^\top W^{-1} 2Z_2 W^{-1} x_{k-d_k} \\ &\quad + x_{k-d_k}^\top W^{-1} 2Z_2 W^{-1} x_{k-\underline{d}} - x_{k-\bar{d}}^\top W^{-1} Z_2 W^{-1} x_{k-\underline{d}} - x_{k-\underline{d}}^\top W^{-1} Z_2 W^{-1} x_{k-\bar{d}} \\ &\quad + x_{k-\bar{d}}^\top W^{-1} 2Z_2 W^{-1} x_{k-d_k} + x_{k-d_k}^\top W^{-1} 2Z_2 W^{-1} x_{k-\bar{d}} \\ &\quad - \text{He} (\phi(u_k)^\top \mathcal{T}^{-1} [\phi(u_k) + \omega_k]) - w_k^\top w_k \quad (3.40) \end{aligned}$$

Considerando-se as matrizes equivalentes dadas por  $\bar{P} = W^{-1}$ ,  $\bar{Q}_1 = W^{-1}Q_1W^{-1}$ ,  $\bar{Q}_2 = W^{-1}Q_2W^{-1}$ ,  $\bar{Z}_1 = W^{-1}Z_1W^{-1}$ ,  $\bar{Z}_2 = W^{-1}Z_2W^{-1}$ ,  $\bar{\mathcal{T}} = \mathcal{T}^{-1}$ ,  $K = LW^{-1}$ ,  $\phi(u_k) = \phi(Kx_k)$ , pode-se reescrever (3.40) como

$$\begin{aligned} \zeta_k^\top \Psi_1(\alpha) \zeta_k &= x_{k+1}^\top \bar{P} x_{k+1} - x_k^\top \bar{P} x_k + x_k^\top \bar{Q}_1 x_k + x_{k-\underline{d}}^\top (\bar{Q}_2 - \bar{Q}_1) x_{k-\underline{d}} - x_{k-\bar{d}}^\top \bar{Q}_2 x_{k-\bar{d}} \\ &\quad - x_k^\top \bar{Z}_1 x_k - x_{k-\underline{d}}^\top (\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2) x_{k-\underline{d}} + x_{k-d_k}^\top 4\bar{Z}_2 x_{k-d_k} - x_{k-\bar{d}}^\top \bar{Z}_2 x_{k-\bar{d}} + x_{k-\underline{d}}^\top \bar{Z}_1 x_k \\ &\quad + x_k^\top \bar{Z}_1 x_{k-\underline{d}} + x_{k-\underline{d}}^\top 2\bar{Z}_2 x_{k-d_k} + x_{k-d_k}^\top 2\bar{Z}_2 x_{k-\underline{d}} - x_{k-\bar{d}}^\top \bar{Z}_2 x_{k-\bar{d}} - x_{k-\underline{d}}^\top \bar{Z}_2 x_{k-\bar{d}} \\ &\quad + x_{k-\bar{d}}^\top 2\bar{Z}_2 x_{k-d_k} + x_{k-d_k}^\top 2\bar{Z}_2 x_{k-\bar{d}} - \text{He}(\phi(u_k)^\top \mathcal{T}^{-1}[\phi(u_k) + \omega_k]) - w_k^\top w_k. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Substituindo-se (3.41) em (3.39) obtém-se

$$\begin{aligned} \zeta_k^\top \hat{\Theta} \zeta_k &= x_{k+1}^\top \bar{P} x_{k+1} - x_k^\top \bar{P} x_k + x_k^\top \bar{Q}_1 x_k + x_{k-\underline{d}}^\top (\bar{Q}_2 - \bar{Q}_1) x_{k-\underline{d}} - x_{k-\bar{d}}^\top \bar{Q}_2 x_{k-\bar{d}} - x_k^\top \bar{Z}_1 x_k \\ &\quad - x_{k-\underline{d}}^\top (\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2) x_{k-\underline{d}} + x_{k-d_k}^\top 4\bar{Z}_2 x_{k-d_k} - x_{k-\bar{d}}^\top \bar{Z}_2 x_{k-\bar{d}} + x_{k-\underline{d}}^\top \bar{Z}_1 x_k + x_k^\top \bar{Z}_1 x_{k-\underline{d}} + x_{k-\underline{d}}^\top 2\bar{Z}_2 x_{k-d_k} \\ &\quad + x_{k-d_k}^\top 2\bar{Z}_2 x_{k-\underline{d}} - x_{k-\bar{d}}^\top \bar{Z}_2 x_{k-\bar{d}} - x_{k-\underline{d}}^\top \bar{Z}_2 x_{k-\bar{d}} + x_{k-\bar{d}}^\top 2\bar{Z}_2 x_{k-d_k} + x_{k-d_k}^\top 2\bar{Z}_2 x_{k-\bar{d}} \\ &\quad + y_{k+1}^\top (\bar{P} + \underline{d}^2 \bar{Z}_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 \bar{Z}_2) y_{k+1} - \text{He}(\phi(u_k)^\top \mathcal{T}^{-1}[\phi(u_k) + \omega_k]) \\ &\quad - w_k^\top w_k + z_k^\top \gamma^{-2} z_k < \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Reorganizando os termos de (3.42) é possível expressar a desigualdade como

$$\begin{aligned} &x_{k+1}^\top \bar{P} x_{k+1} - x_k^\top \bar{P} x_k + x_k^\top \bar{Q}_1 x_k - x_{k-\underline{d}}^\top (\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2) x_{k-\underline{d}} - x_{k-\bar{d}}^\top \bar{Q}_2 x_{k-\bar{d}} \\ &\quad + y_{k+1}^\top (\underline{d}^2 \bar{Z}_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 \bar{Z}_2) y_{k+1} - (x_k - x_{k-\underline{d}})^\top \bar{Z}_1 (x_k - x_{k-\underline{d}}) \\ &\quad - (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}})^\top \bar{Z}_2 (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}}) - \text{He}(\phi(u_k)^\top \mathcal{T}^{-1}[\phi(u_k) + \omega_k]) \\ &\quad - w_k^\top w_k + z_k^\top \gamma^{-2} z_k < \mathbf{0}, \end{aligned}$$

sendo (3.29) verificada, tem-se que

$$\Delta V(\bar{x}_k) - \text{He}(\phi(u_k)^\top \mathcal{T}^{-1}[\phi(u_k) + \omega_k]) - w_k^\top w_k + z_k^\top \gamma^{-2} z_k < \mathbf{0}. \quad (3.43)$$

Portanto, se (3.43) é verificada, tem-se que  $\Delta V(\bar{x}_k) - \text{He}(\phi(u_k)^\top \mathcal{T}^{-1}[\phi(u_k) + \omega_k]) - w_k^\top w_k < -z_k^\top \gamma^{-2} z_k \leq \mathbf{0}$  que assegura a estabilização entrada-estado.

Além disso, a estabilidade local do sistema em malha fechada (3.6), é garantida se o termo  $\phi(Kx_k)^\top \mathcal{T}^{-1}[\phi(Kx_k) + \omega_k]$  é negativo. Para o tal, emprega-se a condição generalizada de setor apresentada em (2.18). Aplicando-se o complemento de Schur em relação ao termo  $\eta \bar{u}_{(\ell)}^2$  de (3.30), para um dado  $\ell$ , considerando  $\omega_k = \mathcal{G}_{(\ell)} \rho_k$ , pré-multiplicando

por  $\rho_k^\top$  e pós-multiplicando por  $\rho_k$ , na LMI resultante, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{0} &< \rho_k^\top \left\{ \begin{bmatrix} W & 0 \\ \star & Q_1 \end{bmatrix} - ([KW \ \mathbf{0}] - \mathcal{G})_{(\ell)}^\top (\eta \bar{u}_{(\ell)}^2)^{-1} ([KW \ \mathbf{0}] - \mathcal{G})_{(\ell)} \right\} \rho_k \\
 &= x_k^\top \bar{P} x_k + x_{k-\underline{d}}^\top \bar{Q}_1 x_{k-\underline{d}} + x_{k-d_k}^\top \bar{Q}_2 x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}}^\top \bar{Q}_2 x_{k-\bar{d}} \\
 &\quad - \rho_k^\top \left\{ ([KW \ \mathbf{0}] - \mathcal{G})_{(\ell)}^\top (\eta \bar{u}_{(\ell)}^2)^{-1} ([KW \ \mathbf{0}] - \mathcal{G})_{(\ell)} \right\} \rho_k \\
 &= x_k^\top \bar{P} x_k + x_{k-\underline{d}}^\top \bar{Q}_1 x_{k-\underline{d}} + x_{k-d_k}^\top \bar{Q}_2 x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}}^\top \bar{Q}_2 x_{k-\bar{d}} - \frac{(Kx_k - \omega_k)_{(\ell)}^\top (Kx_k - \omega_k)_{(\ell)}}{\eta \bar{u}_{(\ell)}^2} \\
 &\leq V(x_0) - (\eta \bar{u}_{(\ell)}^2)^{-1} |(u_k - \omega_k)_{(\ell)}|^2.
 \end{aligned}$$

Se  $\bar{x}_k$  é tal que o conjunto  $\mathcal{S}$ , apresentado em (2.17), é verificado, então a desigualdade (2.18) é verdadeira assegurando que  $-\text{He}(\phi(u_k)^\top \mathcal{T}^{-1}[\phi(u_k) + \omega_k])$  em (3.43) é semi-definida positiva. Consequentemente, como a desigualdade (3.43) é verificada, pode-se concluir que  $\Delta V(\bar{x}_k)$  apresentado em (3.27) é menor que 0. Considerando que as LMIs (3.29) e (3.30) sejam verificadas, pode-se garantir que  $Kx_k \in \mathcal{S}$ , o Lema 3.1 é verificado e então, o sistema incerto de malha fechada resultante é ISS, com a região de atração estimada dada por  $\mathcal{L}_\nu(\eta)$  em (3.28). Dessa forma, se  $w_k = 0$  o sistema não sofre ação da perturbação, e as trajetórias de  $\bar{x}_k$  convergem para a origem, a medida que  $k \rightarrow \infty$ . Para  $w_k \neq 0$  as trajetórias do sistema permanecem limitadas em  $\mathcal{L}_\nu(\eta)$  para qualquer condição inicial  $\bar{x}_0$  pertencente à  $\mathcal{L}_\nu(\beta)$ , dado o relaxamento promovido por  $V(\bar{x}_k) \leq \|w\|_2^2 + V(\bar{x}_0) \leq \delta^{-1} + \beta^{-1} = \eta^{-1}$ , para todo  $k > 0$ . Além disso, a ação da perturbação na saída regulada do sistema é limitada por  $\gamma$ , a partir da relação  $\|z_k\|_2^2 < \gamma^2(\|w\|_2^2 + V(\bar{x}_0))$  para  $k \rightarrow \infty$ . ■

**Observação 3.1** *Um fator relevante para validar a eficiência das condições propostas é a análise da complexidade numérica, que depende do número de variáveis escalares  $\mathcal{K}_1$  e do número de linhas  $\mathcal{L}_1$ . No caso do Teorema 3.1, podem ser calculados:*

$$\mathcal{L}_1 = N(4n + 1 + n) + 2Nn + n + n_u(4n + 1), \quad \mathcal{K}_1 = n_u n + n^2 + \frac{5n(n+1)}{2} + 1.$$

**Observação 3.2** *É necessário que  $\varepsilon$  seja fornecido para que 3.29, seja tratada como uma LMI, caso contrário, a equação será tida como uma BMI.*

### 3.3.1 Condição com variável de folga

A segunda condição proposta como solução do Problema 3.1 foi desenvolvida a partir do uso do Lema de Finsler. Essa abordagem permite a obtenção de condições com variáveis de folga, além de considerar que as matrizes  $P$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Z_1$  e  $Z_2$ , da candidata a função de Lyapunov-Krasovskii (3.7), possuam parâmetros incertos invariantes no tempo  $\alpha$ . Dessa forma, apresenta-se o teorema a seguir, empregado para solução do Problema 3.1.

**Teorema 3.2 (Projeto de Controle)** *Considere o sistema (3.6). Existindo as matrizes simétricas definidas positivas,  $P_i > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_{1i} > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_{2i} > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z_{1i} > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $Z_{2i} > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , para  $i \in [1, N]$ , matrizes  $L \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ ,  $G_{\underline{d}} \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ ,  $G_{d_k} \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ ,  $G_{\bar{d}} \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ , uma matriz diagonal, definida positiva,  $\mathcal{T} > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ , uma matriz  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e os escalares  $\gamma > 0$ ,  $\eta > 0$  e  $\delta > 0$ , que satisfazem:*

$$\begin{bmatrix} -\gamma^2 \mathbf{I}_{n_u} & F_{z_i} \\ \star & \Upsilon_i \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \forall i \in [1, N], \quad (3.44)$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i & \mathbf{0}_{n \times 3n} \\ \star & Q_{1i} \\ & \star \end{bmatrix} & ([L \ \mathbf{0}_{3n_u \times n}] - \mathcal{G})_{(\ell)}^\top \\ & \eta u_{0(\ell)}^2 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \forall \ell \in [1, n_u] \text{ e } \forall i \in [1, N], \quad (3.45)$$

$$\eta - \delta < 0, \quad (3.46)$$

sendo,

$$\begin{aligned} \Upsilon_i &= \Phi_{1i} - \Phi_{2i}, \quad \Phi_{2i} = 2F_6^\top \mathcal{T} F_6 + \text{He}(F_6^\top \mathcal{G}_{(\ell)} \Xi), \quad \mathcal{Q}_{1i} = \text{diag}(Q_{1i}, Q_{2i}, Q_{2i}), \\ \mathcal{G}_{(\ell)} &= [G_{(\ell)} \ G_{\underline{d}(\ell)} \ G_{d_k(\ell)} \ G_{\bar{d}(\ell)}], \quad F_{z_i} = [\mathbf{0}_{n_u \times n} \ C_i \ \mathbf{0}_{n_u \times n} \ C_{d_i} \ \mathbf{0}_{n_u \times n} \ D_i \ D_{w_i}], \\ \Xi &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times n_u} & \mathbf{0}_{n \times n_w} \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times n_u} & \mathbf{0}_{n \times n_w} \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times n_u} & \mathbf{0}_{n \times n_w} \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{n \times n_u} & \mathbf{0}_{n \times n_w} \end{bmatrix}, \\ \Phi_{1i} &= \begin{bmatrix} T_{1i} & T_{4i} & \mathbf{0}_n & A_{d_i} F^\top & \mathbf{0}_n & B_i \mathcal{T} & B_{w_i} \\ \star & T_{2i} & Z_{1i} & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times n_u} & \mathbf{0}_{n \times n_w} \\ \star & \star & T_{3i} & 2Z_{2i} & -Z_{2i} & \mathbf{0}_{n \times n_u} & \mathbf{0}_{n \times n_w} \\ \star & \star & \star & -4Z_{2i} & 2Z_{2i} & \mathbf{0}_{n \times n_u} & \mathbf{0}_{n \times n_w} \\ \star & \star & \star & \star & T_{5i} & \mathbf{0}_{n \times n_u} & \mathbf{0}_{n \times n_w} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \mathbf{0}_{n_u} & \mathbf{0}_{n_u \times n_w} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & -\mathbf{I}_{n_w} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

com as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} Y_i &= \underline{d}^2 Z_{1i} + (\bar{d} - \underline{d})^2 Z_{2i}, \quad T_{1i} = Y_i + P_i - F - F^\top, \quad T_{2i} = Y_i - P_i + Q_{1i} - Z_{1i}, \\ T_{3i} &= Q_{2i} - Q_{1i} - Z_{1i} - Z_{2i}, \quad T_{4i} = A_i F^\top + B_i L - Y_i, \quad T_{5i} = -Z_{2i} - Q_{2i} \end{aligned}$$

e os vetores auxiliares:

$$f_i \in \mathbb{R}^{1 \times 7} : f_{i(j)} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i, \\ 0 & \text{se } j \neq i. \end{cases}, \quad F_i = f_i \otimes \mathbf{I}, \quad F_i \in \mathbb{R}^{n \times (5n + n_u + n_w)}$$

então, se (3.44)-(3.46) são factíveis, o sistema em malha fechada (3.6), com ganho do robusto de realimentação de estados dado por

$$K = LF^{-\top},$$

é tal que

1. Se  $w_k \neq \mathbf{0}$  com  $w \in \mathcal{P}$  :

- (a) as trajetórias do do sistema (3.6) permanecem limitadas em  $\mathcal{L}_V(\eta) \subset \mathcal{R}_A$ , para todo  $\bar{x}_0$  pertencente ao conjunto  $\mathcal{R}_{\varepsilon_0} = \mathcal{L}_V(\beta)$  com  $V(\bar{x}_k, \alpha) \leq \|w\|_2^2 + V(\bar{x}_0, \alpha) \leq \delta^{-1} + \beta^{-1} = \eta^{-1}$ , para todo  $k > 0$ ;
- (b) para  $k \rightarrow \infty$ ,  $\|z_k\|_2^2 < \gamma^2(\|w\|_2^2 + V(\bar{x}_0, \alpha))$ .

2. Se  $w_k = \mathbf{0}$  para todo  $k \geq \bar{k} \geq 0$ , então  $\bar{x}_k \rightarrow \mathbf{0}$  sem deixar  $\mathcal{R}_E$  conforme  $k \rightarrow \infty$ .

**Prova:** Se (3.44) é verificado, então, a positividade dos termos de  $\Upsilon_i$  é garantida e através de (3.7), tem-se que  $V(\bar{x}_k, \alpha) > 0$  para  $\bar{x}_0 \neq 0$ . Além disso,  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$  são regulares, isto é, possuem inversa detonada por  $F^{-1}$  e  $\mathcal{T}^{-1}$  respectivamente. Dessa forma, aplicando-se a transformação de congruência,  $\text{diag}(\mathbf{I}_{n_u}, \Lambda)$  para  $\Lambda = \text{diag}(\mathbf{I}_{5n} \otimes F^{-1}, \mathcal{T}^{-1}, \mathbf{I}_{n_w})$  na LMI (3.44) e aplicando-se o complemento de Schur em relação ao termo  $-\gamma^2 \mathbf{I}_{n_u}$  da matriz resultante da transformação de congruência tem-se

$$\left[ \begin{array}{cccccc} F^{-1}T_{1i}F^{-\top} & F^{-1}T_{4i}F^{-\top} & \mathbf{0} & F^{-1}A_{d_i} & \mathbf{0} & \\ * & F^{-1}T_{2i}F^{-\top} & F^{-1}Z_{1i}F^{-\top} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \\ * & * & F^{-1}T_{3i}F^{-\top} & 2F^{-1}Z_{2i}F^{-\top} & -F^{-1}Z_{2i}F^{-\top} & \\ * & * & * & -4F^{-1}Z_{2i}F^{-\top} & 2F^{-1}Z_{2i}F^{-\top} & \\ * & * & * & * & F^{-1}T_{5i}F^{-\top} & \\ * & * & * & * & * & \\ * & * & * & * & * & \\ F^{-1}B_i & F^{-1}B_{w_i} & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & & \\ * & -\mathbf{I} & & & & \end{array} \right] - \Lambda(2F_6^\top \mathcal{T}^{-1}F_6 + \text{He}(F_6^\top \mathcal{G}_{(\ell)}\Xi))\Lambda + F_{z_i}^\top \gamma^{-2}F_{z_i} < \mathbf{0}, \forall i \in [1, N] \quad (3.47)$$

para  $G_f = [F^{-\top} \quad \mathbf{0}_{n \times 4n+n_u+n_w}]^\top$ ,  $\beta_f = [-\mathbf{I}_n \quad A_{cl} \quad \mathbf{0}_n \quad A_d \quad \mathbf{0}_n \quad B \quad B_w]$ ,  $A_{cl} = A + BK$  e separando-se os termos, da matriz da esquerda, na LMI (3.47), em função de  $G_f$  e  $\beta_f$ , obtém-se

$$\Phi_{1i} + G_f \beta_f + \beta_f^\top G_f - \Lambda(2F_6^\top \mathcal{T}^{-1}F_6 + \text{He}(F_6^\top \mathcal{G}_{(\ell)}\Xi))\Lambda + F_{z_i}^\top \gamma^{-2}F_{z_i} < \mathbf{0}, \forall i \in [1, N], \quad (3.48)$$

em que  $\Phi_{1i}$  é dado por,

$$\begin{bmatrix} F^{-1}T_{0i}F^{-\top} & -F^{-1}Y_iF^{-\top} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & F^{-1}T_{2i}F^{-\top} & F^{-1}Z_{1i}F^{-\top} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & F^{-1}T_{3i}F^{-\top} & 2F^{-1}Z_{2i}F^{-\top} & -F^{-1}Z_{2i}F^{-\top} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -4F^{-1}Z_{2i}F^{-\top} & 2F^{-1}Z_{2i}F^{-\top} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & F^{-1}T_{5i}F^{-\top} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

com  $T_{0i} = Y_i + P_i$ .

Adotando-se  $\bar{Y}_i = F^{-1}Y_iF^{-\top}$ ,  $\bar{P}_i = F^{-1}P_iF^{-\top}$ ,  $\bar{T}_{2i} = F^{-1}T_{2i}F^{-\top}$ ,  $\bar{T}_{3i} = F^{-1}T_{3i}F^{-\top}$ ,  $\bar{T}_{5i} = F^{-1}(-Z_{2i} - Q_{2i})F^{-\top} = (-\bar{Z}_{2i} - \bar{Q}_{2i})$  e separando-se a matriz identidade da linha e coluna 7, dos demais termos de  $\Phi_{1i}$  reescreve-se (3.49) como

$$\hat{\Phi}_{1i} = \bar{\Phi}_{1i} - F_7^\top F_7 = \begin{bmatrix} \bar{Y}_i + \bar{P}_i & \bar{Y}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \bar{T}_{2i} & \bar{Z}_{1i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \bar{T}_{3i} & 2\bar{Z}_{2i} & -\bar{Z}_{2i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -4\bar{Z}_{2i} & 2\bar{Z}_{2i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \bar{T}_{5i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & \mathbf{0} \end{bmatrix} - F_7^\top F_7. \quad (3.50)$$

Dessa forma, a partir da aplicação do Lema de Finsler, apresentado no apêndice A.3, substituindo-se (3.50) em (3.48) tem-se a seguinte representação equivalente

$$\Theta_i = \bar{\Phi}_{1i} - 2F_6^\top \mathcal{T}^{-1}F_6 - \text{He}(F_6^\top \mathcal{G}_{(\ell)}\Xi) - F_7^\top F_7 + F_{z_i}^\top \gamma^{-2}F_{z_i} < \mathbf{0}, \forall i \in [1, N], \quad (3.51)$$

Multiplicando (3.51) por  $\alpha_{(i)}$  e somando para  $i \in [1, N]$ , obtém-se

$$\Theta(\alpha) = \bar{\Phi}_1(\alpha) - 2F_6^\top \mathcal{T}^{-1}F_6 - \text{He}(F_6^\top \mathcal{G}_{(\ell)}\Xi) - F_7^\top F_7 + F_z(\alpha)^\top \gamma^{-2}F_z(\alpha) < \mathbf{0}. \quad (3.52)$$

Tomando-se os vetores aumentados  $\rho_k$  e  $\zeta_k$ , definidos por,

$$\rho_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-d} \\ x_{k-d_k} \\ x_{k-\bar{d}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\rho}_k = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \rho_k \end{bmatrix}, \quad \zeta_k = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_k \\ \phi(Kx_k) \\ w_k \end{bmatrix},$$

pré-multiplicando por  $\zeta_k^\top$  e pós multiplicando por  $\zeta_k$ , na LMI (3.52) obtém-se,

$$\zeta_k^\top (\bar{\Phi}_1(\alpha) - 2F_6^\top \mathcal{T}^{-1}F_6 - \text{He}(F_6^\top \mathcal{G}_{(\ell)}\Xi) - F_7^\top F_7 + F_z(\alpha)^\top \gamma^{-2}F_z(\alpha)) \zeta_k < 0.$$

Considerando  $\omega_k = \mathcal{G}_{(\ell)}\Xi\zeta_k = \mathcal{G}_{(\ell)}\rho_k$ ,  $z_k = F_z(\alpha)\zeta_k$ ,  $w_k = F_7\zeta_k$ , é possível determinar

$$\zeta_k^\top \Theta(\alpha)\zeta_k = \zeta_k^\top \bar{\Phi}_1(\alpha)\zeta_k - \text{He}(\phi(u_k)^\top \mathcal{T}^{-1}(\phi(u_k) + \omega_k)) - w_k^\top w_k + z_k^\top \gamma^{-2}z_k < 0. \quad (3.53)$$

Além disso, é possível expandir o termo  $\zeta_k^\top \bar{\Phi}_1(\alpha) \zeta_k$  em

$$\begin{aligned}
 & x_{k+1}^\top \bar{P}(\alpha) x_{k+1} + x_{k+1}^\top \bar{Y}(\alpha) x_{k+1} - x_{k+1}^\top \bar{Y}(\alpha) x_k - x_k^\top \bar{Y}(\alpha) x_{k+1} + x_k^\top \bar{T}_2(\alpha) x_k \\
 & \quad + x_k^\top \bar{Z}_1(\alpha) x_{k-\underline{d}} + x_{k-\underline{d}}^\top \bar{Z}_1(\alpha) x_k + x_{k-\underline{d}}^\top \bar{T}_3(\alpha) x_{k-\underline{d}} + x_{k-d_k}^\top 2\bar{Z}_2(\alpha) x_{k-\underline{d}} \\
 & \quad + x_{k-\underline{d}}^\top 2\bar{Z}_2(\alpha) x_{k-d_k} - x_{k-d_k}^\top 4\bar{Z}_2(\alpha) x_{k-d_k} - x_{k-\underline{d}}^\top \bar{Z}_2(\alpha) x_{k-\bar{d}} - x_{k-\bar{d}}^\top \bar{Z}_2(\alpha) x_{k-\underline{d}} \\
 & \quad + x_{k-d_k}^\top 2\bar{Z}_2(\alpha) x_{k-\bar{d}} + x_{k-\bar{d}}^\top 2\bar{Z}_2(\alpha) x_{k-d_k} - x_{k-\bar{d}}^\top (\bar{Z}_2(\alpha) + Q_2(\alpha)) x_{k-\bar{d}}. \quad (3.54)
 \end{aligned}$$

Isto posto, diferentemente do Teorema 3.1, o termo  $\bar{Y}(\alpha)$  é explícito, não sendo necessária a relação que utiliza  $\varepsilon$ . Sendo assim, a partir das matrizes

$$\begin{aligned}
 \bar{Y}(\alpha) &= \underline{d}^2 \bar{Z}_1(\alpha) + (\bar{d} - \underline{d})^2 \bar{Z}_2(\alpha), \quad \bar{T}_2(\alpha) = \bar{Y}(\alpha) - \bar{P}(\alpha) + \bar{Q}_1(\alpha) - \bar{Z}_1(\alpha), \\
 \bar{T}_3(\alpha) &= \bar{Q}_2(\alpha) - \bar{Q}_1(\alpha) - \bar{Z}_1(\alpha) - \bar{Z}_2(\alpha),
 \end{aligned}$$

é possível reescrever (3.54) como

$$\begin{aligned}
 & x_{k+1}^\top \bar{P}(\alpha) x_{k+1} + x_{k+1}^\top \bar{Y}(\alpha) x_{k+1} - x_{k+1}^\top \bar{Y}(\alpha) x_k - x_k^\top \bar{Y}(\alpha) x_{k+1} + x_k^\top (\bar{Y}(\alpha) - \bar{P}(\alpha) + \bar{Q}_1(\alpha) \\
 & - \bar{Z}_1(\alpha)) x_k + x_k^\top \bar{Z}_1(\alpha) x_{k-\underline{d}} + x_{k-\underline{d}}^\top \bar{Z}_1(\alpha) x_k + x_{k-\underline{d}}^\top (\bar{Q}_2(\alpha) - \bar{Q}_1(\alpha) - \bar{Z}_1(\alpha) - \bar{Z}_2(\alpha)) x_{k-\underline{d}} \\
 & \quad + x_{k-d_k}^\top 2\bar{Z}_2(\alpha) x_{k-\underline{d}} + x_{k-\underline{d}}^\top 2\bar{Z}_2(\alpha) x_{k-d_k} - x_{k-d_k}^\top 4\bar{Z}_2(\alpha) x_{k-d_k} - x_{k-\underline{d}}^\top \bar{Z}_2(\alpha) x_{k-\bar{d}} \\
 & \quad - x_{k-\bar{d}}^\top \bar{Z}_2(\alpha) x_{k-\underline{d}} + x_{k-d_k}^\top 2\bar{Z}_2(\alpha) x_{k-\bar{d}} + x_{k-\bar{d}}^\top 2\bar{Z}_2(\alpha) x_{k-d_k} \\
 & \quad - x_{k-\bar{d}}^\top (\bar{Z}_2(\alpha) + Q_2(\alpha)) x_{k-\bar{d}}. \quad (3.55)
 \end{aligned}$$

Dessa forma, a partir das desigualdades de Jensen, apresentadas em (3.19) e (3.25), para os somatórios  $S_1$  e  $S_2$ ,  $y_{k+1} = x_{k+1} - x_k$  e substituindo-se  $\zeta_k^\top \bar{\Phi}_1(\alpha) \zeta_k$  por (3.55) em (3.53) obtém-se

$$\Delta V(\bar{x}_k, \alpha) - \text{He}(\phi(u_k)^\top \mathcal{T}^{-1}[\phi(u_k) + \omega_k]) - w_k^\top w_k + z_k^\top \gamma^{-2} z_k < 0. \quad (3.56)$$

Portanto, se (3.56) é verificada, tem-se que  $\Delta V(\bar{x}_k, \alpha) - \text{He}(\phi(u_k)^\top \mathcal{T}^{-1}[\phi(u_k) + \omega_k]) - w_k^\top w_k \leq -z_k^\top \gamma^{-2} z_k < 0$  assegurando a estabilidade entrada-estado. Além disso, a estabilidade local do sistema em malha fechada (3.6), é garantida se o termo  $\phi(Kx_k)^\top \mathcal{T}^{-1}[\phi(Kx_k) + \omega_k]$  é negativo. Para o tal, emprega-se a condição generalizada de setor apresentada em (2.18). Aplicando-se o complemento de Schur na última linha e coluna de (3.45), para um dado  $\ell$ , considerando  $\Lambda_2 = \text{diag}(\mathbf{I}_4 \otimes F^{-\top})$  e  $\omega_k = \bar{\mathcal{G}}_{(\ell)} \rho_k \Lambda_2$ , pré-multiplicando por  $(\rho_k \Lambda_2)^\top$  e pós-multiplicando por  $\rho_k \Lambda_2$ , na LMI resultante, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & 0 < (\rho_k \Lambda_2)^\top \left\{ \begin{bmatrix} \bar{P} & \mathbf{0} \\ \star & \bar{Q}_1 \end{bmatrix} - ([KF^\top \ \mathbf{0}] - \bar{\mathcal{G}})_{(\ell)}^\top (\eta \bar{u}_{(\ell)}^2)^{-1} ([KF^\top \ \mathbf{0}] - \bar{\mathcal{G}})_{(\ell)} \right\} \rho_k \Lambda_2 \\
 & = x_k^\top F^{-1} \bar{P} F^{-\top} x_k + x_{k-\underline{d}}^\top F^{-1} \bar{Q}_1 F^{-\top} x_{k-\underline{d}} + x_{k-d_k}^\top F^{-1} \bar{Q}_2 F^{-\top} x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}}^\top F^{-1} \bar{Q}_2 F^{-\top} x_{k-\bar{d}} \\
 & \quad - (\rho_k \Lambda_2)^\top \left\{ ([KF^\top \ \mathbf{0}] - \bar{\mathcal{G}})_{(\ell)}^\top (\eta \bar{u}_{(\ell)}^2)^{-1} ([KF^\top \ \mathbf{0}] - \bar{\mathcal{G}})_{(\ell)} \right\} \rho_k \Lambda_2 \\
 & = x_k^\top P x_k + x_{k-\underline{d}}^\top Q_1 x_{k-\underline{d}} + x_{k-d_k}^\top Q_2 x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}}^\top Q_2 x_{k-\bar{d}} - \frac{(Kx_k - \omega_k)_{(\ell)}^\top (Kx_k - \omega_k)_{(\ell)}}{(\eta \bar{u}_{(\ell)}^2)} \\
 & \leq V(x_0, \alpha) - (\eta \bar{u}_{(\ell)}^2)^{-1} |(u_k - \omega_k)_{(\ell)}|^2.
 \end{aligned}$$

Se  $\bar{x}_k$  é tal que o conjunto  $\mathcal{S}$ , apresentado em (2.17), é verificado, então a desigualdade (2.18) é verdadeira assegurando que  $-\text{He}(\phi(u_k)^\top \mathcal{T}^{-1}[\phi(u_k) + \omega_k])$  em (3.43) é semi-definida positiva. Consequentemente, como a desigualdade (3.56) é verificada, pode-se concluir que  $\Delta V(\bar{x}_k, \alpha)$  apresentado em (3.27) é menor que 0. Considerando que as LMIs (3.44) e (3.45) e a desigualdade (3.46) sejam verificadas, pode-se garantir que  $Kx_k \in \mathcal{S}$ , o Lema 3.1 é verificado e então, o sistema incerto de malha fechada resultante é ISS, com a região de atração estimada dada por  $\mathcal{L}_V(\eta)$  em (3.28). Dessa forma, se  $w_k = 0$  o sistema não sofre ação da perturbação, e as trajetórias de  $\bar{x}_k$  convergem para a origem, a medida que  $k \rightarrow \infty$ . Para  $w_k \neq 0$  as trajetórias do sistema permanecem limitadas em  $\mathcal{L}_V(\eta)$  para qualquer condição inicial  $\bar{x}_0$  pertencente à  $\mathcal{L}_V(\beta)$ , dado o relaxamento promovido por  $V(\bar{x}_k, \alpha) \leq \|w\|_2^2 + V(\bar{x}_0, \alpha) \leq \delta^{-1} + \beta^{-1} = \eta^{-1}$ , para todo  $k > 0$ . Além disso, a ação da perturbação na saída regulada do sistema é limitada por  $\gamma$ , a partir da relação  $\|z_k\|_2^2 < \gamma^2(\|w\|_2^2 + V(\bar{x}_0, \alpha))$  para  $k \rightarrow \infty$ . ■

**Observação 3.3** Destaca-se que, a condição convexa proposta no Teorema 3.2, apresenta uma solução em que o funcional de L-K possui matrizes dependentes de parâmetros, incertos e invariantes no tempo, devido à abordagem baseada no Lema de Finsler, que introduz variáveis de folga. Além disso, diferentemente do Teorema 3.1, o termo  $\underline{d}^2 \bar{Z}_{1i} + (\bar{d} - \underline{d})^2 \bar{Z}_{2i}$ , não possui a majoração que utiliza  $\varepsilon$ , não sendo necessário escolher valores deste parâmetro para tratar a desigualdade 3.44 como LMI e obter soluções factíveis ótimas.

**Observação 3.4** De forma análoga à Observação 3.1, apresentada no Teorema 3.1, a complexidade numérica do Teorema 3.2, pode ser calculada a partir de  $\mathcal{L}_2$  e  $\mathcal{K}_2$  sendo

$$\mathcal{L}_2 = N(5n + n_u + n_w) + n + n_u(4n + 1), \mathcal{K}_2 = n_u n + 5n^2 + n_u^2 + \frac{5n(n+1)}{2} + 2.$$

**Observação 3.5** A solução dos Teoremas 3.1 e 3.2, garante que  $V(\bar{x}, \alpha)$  seja uma função de L-K e que  $\Delta V(\bar{x}, \alpha) < 0$ . Dessa forma, a partir do Lema (3.1) assegura-se a estabilidade robusta local do sistema (3.6). Sendo assim, o conjunto  $\mathcal{R}_\mathcal{E}$  determina estimativa da região de atração.

## 3.4 Considerações Finais

Neste capítulo, foi formalizado o problema de estabilização entrada-estado. Com a ajuda de resultados presentes na literatura, foi feita a caracterização algébrica da região estimada de atração,  $\mathcal{R}_\mathcal{E}$ , por meio do Lema 3.1. Em seguida, as condições para estabilização do caso incerto foram propostas. No Capítulo 4, são apresentados os exemplos numéricos para ilustrar as condições desenvolvidas, assim como investigada a representação geométrica da estimativa da região de atração.

## Caracterização da Região de Atração

Neste capítulo é apresentada uma nova abordagem para a caracterização geométrica da região de atração a partir de uma função de Lyapunov-Krasovskii que assegura a estabilidade (regional) de sistemas com atraso variante no tempo nos estados. Inspirado pelos trabalhos (Castro *et al.*, 2020) e (Silva *et al.*, 2018a) o funcional de L-K, apresentado no Capítulo 3, é reescrito em um espaço aumentado, permitindo a proposição de procedimentos de otimização mais eficientes que as outras condições encontradas na literatura. Como consequência, a região de estimativa de atração obtida pode ser aplicada em casos numéricos, para ilustrar a eficácia das condições desenvolvidas. Parte dos resultados apresentados neste capítulo pode ser encontrada em (Silva Jr. *et al.*, 2022a) e (Silva Jr. *et al.*, 2022b).

### 4.1 Caracterização Geométrica da Região de Atração

Distintas abordagens para a caracterização da região de condições iniciais para sistemas discretos com atrasos e atuadores saturantes, são apresentadas por Zhang *et al.* (2011), Xu *et al.* (2012), Chen *et al.* (2014), Silva *et al.* (2018b), Chen *et al.* (2019), de Souza *et al.* (2019), Castro *et al.* (2020) e Lima *et al.* (2021). Tal caracterização é necessária para analisar o conjunto de valores que os estados podem assumir, assegurando trajetórias limitadas dentro de  $\mathcal{R}_A$  e convergentes para a origem.

Em (Xu *et al.*, 2012) são determinados ganhos robustos para realimentação de estado, em que a região de atração é aproximada por uma bola dentro do espaço  $\mathbb{R}^n$  com raio  $r_1$ . Com isso, os conjuntos de condições iniciais  $\varphi_{(\bar{d},0)} = \{x_{-\bar{d}}, x_{-\bar{d}+1}, \dots, x_0\}$  têm cada um de seus componentes limitados uniformemente.

Zhang *et al.* (2011) apresentam uma abordagem para síntese de controladores robustos, por realimentação de estados, para sistemas chaveados, a partir de matrizes constantes que caracterizam a estrutura das incertezas. Além disso, a caracterização da região de atração é realizada através de múltiplas funções de Lyapunov. O conjunto de nível  $\mathcal{L}_V(\beta)$

pode ser expresso pela interseção de conjuntos elipsoidais  $x_k^\top P_i x_k \leq \beta$ . Dessa forma, a região estimada pode ser mais geral que a bola estimada em (Xu *et al.*, 2012).

Outras abordagens buscam reduzir o conservadorismo das estimativas ao tentar considerar a variação dos componentes de  $\varphi_{(\bar{d},0)}$ . Em (Chen *et al.*, 2014) e (Chen *et al.*, 2019) a região de atração é estimada pelo conjunto  $\hat{\chi}_r = \{\varphi_{(\bar{d},k)} : |\varphi_{(\bar{d},k)}|_c \leq r_1, |\varphi_{(\bar{d},k+1)} - \varphi_{(\bar{d},k)}|_c \leq r_2\}$  com  $r_1$  e  $r_2$ , obtidos por meio do máximo autovalor de cada matriz  $P$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Z_1$  e  $Z_2$  do funcional de L-K. Tal abordagem pode ser convenientemente expressa em termos das métricas da sequência de vetores que compõem a condição inicial e de sua respectiva variação no tempo conforme a seguir:

$$\|\varphi_{(\bar{d},0)}\| = \max_{j=0,\dots,\bar{d}} |x_{k-j}| \quad (4.1)$$

$$\|\Delta\varphi_{(\bar{d},0)}\| = \max_{j=1,\dots,\bar{d}} |x_{k-j} - x_{k-j+1}|. \quad (4.2)$$

Dessa forma, o conjunto de condições iniciais, dos estados atuais, é limitado por  $r_1$  como em Xu *et al.* (2012), mas restringindo a variação dos componentes sucessivos de  $\varphi_{(\bar{d},0)}$ . Essa variação é limitada a  $r_2$  em Chen *et al.* (2014) e Chen *et al.* (2019) enquanto que em Xu *et al.* (2012) a variação admissível é de  $2r_1$ .

Já em (Silva *et al.*, 2018b) foi proposta uma abordagem para obtenção de um controlador fuzzy Takagi-Sugeno, em que a caracterização da estimativa da região é dividida em duas partes: um elipsóide  $\mathcal{C}$  contido em  $\mathbb{R}^n$  para os estados atuais  $x_0$ , e uma região  $\mathcal{B}(r_1, r_2)$  para os estados atrasados, delimitados pela sequência  $\varphi_0$  obtida pela remoção de  $x_0$ . Além disso, é considerada a região de estabilidade do modelo que é denotada por  $\mathcal{V}_0 = \{x_k \in \mathbb{R}^n : |L_{(\ell)}x_k| \leq \eta_{(\ell)}\}$  com  $\eta_{(\ell)} > 0$ ,  $L_{(\ell)} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  e  $\ell \in [1, \kappa]$ , sendo  $\kappa$  o número de restrições do sistema. Em que  $\mathcal{C} = \{x_0 \in E_{\bar{d}+1} : V_1(x_0, \alpha_0) \leq c(\varphi_{(\bar{d},0)})\} \subseteq \mathcal{V}_0$  e  $\mathcal{B}(r_1, r_2) = \{\varphi_{(\bar{d},0)_j} \in E_j, j \in [1, \bar{d}] : \|\varphi_{(\bar{d},0)}\| \leq r_1, \|\Delta\varphi_{(\bar{d},0)}\| \leq r_2 \text{ e } \varphi_{(\bar{d},0)_j} \in \mathcal{V}_0, j \in [1, \bar{d}]\}$ . Assim, não são levados em conta todos os estados atrasados e as estimativas de  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{B}(r_1, r_2)$  são independentes, uma vez que, a função fuzzy candidata Lyapunov-Krasovskii, empregada em (Silva *et al.*, 2018b), não considera o acoplamento entre o estado atual  $x_0$  e o estado atrasado  $x_{-1}$ .

Visando uma caracterização geométrica mais geral, (Silva *et al.*, 2018a) e (de Souza *et al.*, 2019), utilizaram um conjunto elipsoidal em um espaço aumentado com dimensão  $n(\bar{d} + 1)$ , sendo  $\bar{d}$  o valor máximo do atraso. Para de Souza *et al.* (2019), por exemplo, emprega-se uma candidata a função de Lyapunov aumentada, a qual é determinada pela combinação de todos os estados atrasados no intervalo de 0 a  $\bar{d}$ , definindo-se o conjunto  $\mathcal{C} = \{d^+ \in \mathbb{S} : \mathbb{S} \triangleq [\max(\underline{d}, d_k - \Delta\bar{d}), \min(\bar{d}, d_k + \Delta\bar{d})]\}$ . Essa candidata, representa um conjunto de nível descrito por  $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(\eta) = \{\varphi_{(\bar{d},k)} \in \mathbb{R}^{n(\bar{d}+1)} : V_{\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k, d_k} \leq \eta^{-1}\}$ . Diferentemente dos anteriores, o resultado proposto em (Silva *et al.*, 2018a) e (de Souza *et al.*, 2019) considera a variação dos atrasos entre amostragens consecutivas. Entretanto, por considerar todos

os estados atrasados tal solução requer um elevado custo computacional. Adicionalmente ao encontrado em (Chen *et al.*, 2014) e (Chen *et al.*, 2019), em (Castro *et al.*, 2020) a estimativa da região de atração considera os acoplamentos entre  $x_j$  e  $x_{j-1}$ , com  $j \in [0, \bar{d}]$ , por meio de um funcional de L-K que relaciona diretamente os estados atrasados e atuais. Tal abordagem também é empregada na candidata a função de Lyapunov-Krasovskii do presente trabalho. Dessa forma, as condições dependem do vetor  $x_k$ , dos estados relacionados com o maior e o menor atraso  $x_{k-\bar{d}}$  e  $x_{k-\underline{d}}$ , e do estado atrasado  $x_{k-d_k}$ . Assim sendo, não se tem um sistema aumentado composto por todos os estados atrasados reduzindo-se a complexidade numérica das condições especialmente para valores maiores de  $\bar{d}$ . Isto posto, para (Castro *et al.*, 2020) a região é obtida através dos conjuntos  $\mathcal{C} = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : V_1(x_0) \leq 1 - \gamma\}$  e  $\mathcal{V} = \{y_0 \in \mathbb{R}^n : y_0^\top J y_0 < 1\}$ , os quais produzem a região  $\mathcal{B}(r_1, r_2)$ , em que  $\|\varphi_0\| \leq r_1$  e  $\|\Delta\varphi_0\| \leq r_2$  e  $y_0 = x_0 - x_{-1}$ . Os valores de  $\gamma$ ,  $r_1$  e  $r_2$  dependem das matrizes do funcional de L-K e do valor do atraso.

Em (Lima *et al.*, 2021) uma função de Lyapunov-Krasovskii é mapeada em um espaço aumentado para explorar melhores métodos de otimização e ampliar a região estimada de atração. Porém é utilizado um funcional de L-K diferente daquele empregado em Castro *et al.* (2020), abordando-se apenas o caso precisamente conhecido. A caracterização da região é estimada a partir do elipsoide com raio determinado através do maior autovalor da matriz resultante em espaço aumentado.

No presente trabalho é proposta uma nova abordagem para a caracterização da região de atração, partindo-se da candidata de Lyapunov-Krasovskii, empregando um vetor de estados aumentados porém, preservando-se o baixo custo computacional. Tal caracterização será melhor detalhada nas seções seguintes. Diferentemente de (Zhang *et al.*, 2011), (Xu *et al.*, 2012), (Chen *et al.*, 2014) e (Chen *et al.*, 2019), que delimitam a região de atração como uma bola pertencente a  $\mathbb{R}^n$ , com raio  $r_1 = r$  e  $r_2 = 2r$ , no presente trabalho  $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$  pode ser estimada como uma região em espaço aumentado, flexibilizando as relações entre os vetores de estados atrasados. Tal abordagem é possibilitada a partir do acoplamento de  $x_0$  e  $x_{-1}$ , ou seja,  $y_0$ , da candidata de L-K (3.7) e da caracterização geométrica da região em espaço aumentado. Logo, é gerada uma região menos conservadora, comparando-se com Zhang *et al.* (2011); Xu *et al.* (2012); Chen *et al.* (2014); Silva *et al.* (2018b); Chen *et al.* (2019); Castro *et al.* (2020); Lima *et al.* (2021), mencionados anteriormente, as quais determinam regiões convexas  $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ . Somado à isso, a nova abordagem não apresenta uma grande complexidade computacional, comparando-se com as condições menos conservadoras encontradas na literatura, (de Souza *et al.*, 2019) e (Silva *et al.*, 2018a) que podem possuir elevado custo computacional para a obtenção das soluções, como ilustrado nos exemplos numéricos.

**Estimação da região de atração**

A estimação da região de atração  $\mathcal{R}_\mathcal{E}$  é determinada a partir da candidata a função L-K conforme apresentado no Lema a seguir.

**Lema 4.1** *Se  $V(\bar{x}_k) = V_1(x_k) + V_2(\bar{x}_k) + V_3(\bar{x}_k)$  em que,*

$$V_1(x_k) = x_k^\top \bar{P} x_k, \quad (4.3)$$

$$V_2(\bar{x}_k) = \sum_{i=k-\underline{d}}^{k-1} x_i^\top \bar{Q}_1 x_i + \sum_{i=k-\bar{d}}^{k-\underline{d}-1} x_i^\top \bar{Q}_2 x_i, \quad (4.4)$$

$$V_3(\bar{x}_k) = \underline{d} \sum_{i=1-\underline{d}}^0 \sum_{j=k+i}^k y_j^\top \bar{Z}_1 y_j + (\bar{d} - \underline{d}) \sum_{i=1-\bar{d}}^{-\underline{d}} \sum_{j=k+i}^k y_j^\top \bar{Z}_2 y_j, \quad (4.5)$$

com

$$y_j = x_j - x_{j-1},$$

é uma função L-K, assegurando a estabilidade robusta local do sistema

$$\begin{cases} x_{k+1} &= (A(\alpha) + B(\alpha)K)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d_k} + B(\alpha)\phi(Kx_k) + B_w(\alpha)w_k, \\ z_k &= C(\alpha)x_k + C_d(\alpha)x_{k-d_k} + D(\alpha)\phi(Kx_k) + D_w(\alpha)w_k, \end{cases}$$

então o conjunto  $\mathcal{R}_\mathcal{E}$  pode ser definido a partir do conjunto de nível  $\mathcal{L}_V(\eta)$ :

$$\mathcal{R}_\mathcal{E} = \mathcal{L}_V(\eta) = \{\bar{x}_k \in \mathbb{R}^{n(\bar{d}+1)}; V(\bar{x}_k) = \bar{x}_k^\top \bar{M} \bar{x}_k \leq \eta^{-1}\}, \quad (4.6)$$

sendo que  $\bar{x}_k$  representa o vetor de estados aumentados dado por

$$\bar{x}_k = [x_k^\top \quad x_{k-1}^\top \quad x_{k-2}^\top \quad \cdots \quad x_{k-\bar{d}}^\top]^\top,$$

e a matriz  $\bar{M}$  permite a reescrita do funcional de L-K, no espaço aumentado, sendo definida por:

$$\bar{M} = P_f + Q_{1f} + Q_{2f} + Z_{1f} + Z_{2f}, \quad (4.7)$$

com as matrizes

$$P_f = v_1 v_1^\top \otimes \bar{P}, \quad Q_{1f} = \left( \sum_{i=2}^{1+\underline{d}} v_i v_i^\top \right) \otimes \bar{Q}_1, \quad Q_{2f} = \left( \sum_{i=\underline{d}+2}^{\bar{d}+1} v_i v_i^\top \right) \otimes \bar{Q}_2,$$

$$D_1 = \underline{d} \sum_{i=1}^{\underline{d}} \sum_{j=1}^{\underline{d}} v_i v_j^\top d_{1ij} \otimes \bar{Z}_1, \quad Z_{1f} = \text{diag}(D_1, \mathbf{0}),$$

$$D_2 = \iota_1 \sum_{i=1}^{\iota_1} \sum_{j=1}^{\iota_1} v_i v_j^\top d_{2ij} \otimes \bar{Z}_2, \quad D_3 = \iota_2 \sum_{i=1}^{\iota_2} \sum_{j=1}^{\iota_2} v_i v_j^\top d_{3ij} \otimes \bar{Z}_2,$$

$$Z_{2f} = -\iota_1^2 \text{He}(v_{(\iota_2+1)} v_{\iota_2}^\top) \otimes \bar{Z}_2 + \text{diag}(D_3, D_2),$$

$\iota_1 = (\bar{d} - \underline{d})$ ,  $\iota_2 = (\underline{d} + 1)$ ,  $v_i = [0_{n(1 \times i-1)n} \quad I_n \quad 0_{n(1 \times \bar{d}+1-i)n}]$  e  $d_{kij} = d_{kji}$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$d_{1ij} = \begin{cases} \underline{d}, & i = j = 1 \\ 2\underline{d} - (2i - 3), & i = j > 1 \\ -(\underline{d} - (i - 2)), & |i - j| = 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$d_{2ij} = \begin{cases} 2\iota_1 - (2i - 1), & i = j \\ -(\iota_1 - (i - 1)), & |i - j| = 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$d_{3ij} = \begin{cases} \iota_2, & i = j = 1 \\ 2\iota_2, & i = j > 1 \\ -\iota_2, & |i - j| = 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Prova:** A regra de formação geral, dada por (4.7) permite reescrever (4.3)-(4.5) de forma exata, utilizando um espaço aumentado definido a partir de  $\bar{x}_k : \bar{x}_k^\top \bar{M} \bar{x}_k \equiv V(\bar{x}_k)$ . Se  $V(\bar{x}_k)$  é um funcional L-K, então qualquer condição inicial correspondente a um vetor  $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^{n(\bar{d}+1)}$  verificando  $\bar{x}_0^\top \bar{M} \bar{x}_0 \leq \eta^{-1}$  garante que  $\bar{x}_k$ ,  $k \geq 1$ , pertence ao interior de  $\mathcal{L}_\nu$ , graças à propriedade funcional L-K:  $V(\bar{x}_k) - V(\bar{x}_0) = \bar{x}_k^\top \bar{M} \bar{x}_k - \bar{x}_0^\top \bar{M} \bar{x}_0 < 0$ , significando que,  $\bar{x}_k^\top \bar{M} \bar{x}_k \leq \bar{x}_0^\top \bar{M} \bar{x}_0 \leq \eta^{-1}$  com  $\bar{M}$  dado por (4.7). ■

**Observação 4.1**  $\bar{M}$  representa a matriz formada pela expansão da função de L-K (4.3)-(4.5), determinada a partir da regra de formação geral, dada no Lema 4.1 sem simplificações ou majorações.

**Observação 4.2** Ressalta-se que o nível definido em (4.6), pertence a um espaço aumentado. Tal característica permite melhores procedimentos de otimização sem aumentar o custo computacional das condições de estabilização, fator o qual será demonstrado nas próximas seções. Dessa forma, obtém-se uma definição de região estimada com um volume de dimensão  $n(\bar{d} + 1)$ .

**Observação 4.3** Outras propostas para o funcional de L-K também podem usufruir das estratégias postas no Lema 4.1, realizando-se os ajustes necessários em  $\bar{M}$  e suas regras de formação.

A determinação do conjunto de nível  $\mathcal{L}_\nu(\eta)$ , para (4.6), pode ser feita como apresentado no Lema a seguir, adaptado de Jungers & Castelan (2011, Lemma 4) e que pode ser visto como caso particular do Lema 2 de Figueiredo *et al.* (2021).

**Lema 4.2** Seja o conjunto elipsoidal  $\mathcal{E}(M_{id}, \eta)$  dado por

$$\mathcal{E}(M_{id}, \eta) = \{\bar{x}_k \in \mathbb{R}^{n(\bar{d}+1)}; \bar{x}_k^\top M_{id} \bar{x}_k \leq \eta^{-1}\},$$

para  $i \in [1, N]$  e  $d \in [1, \bar{d}]$ . Então, o conjunto de nível  $\mathcal{L}_V(\eta)$  definido em (4.6) pode ser expresso pela interseção de conjuntos elipsoidais, tal que:

$$\mathcal{L}_V(\eta) = \bigcap_{\substack{d_k \in [1, \bar{d}] \\ \alpha \in \Gamma}} \mathcal{E}(M(\alpha, d_k), \eta) = \bigcap_{\substack{d \in [1, \bar{d}] \\ i \in [1, N]}} \mathcal{E}(M_{id}, \eta).$$

Os conjuntos de nível serão determinados através do Lema 4.2, para prover as estimativas da região de atração e da região de condições iniciais admissíveis do sistema (3.6), designadas  $\mathcal{R}_\mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}_\mathcal{A}$  e  $\mathcal{R}_{\mathcal{E}0} \subseteq \mathcal{R}_0$ , respectivamente. Neste capítulo são apresentados os procedimentos de otimização aplicados em cada condição desenvolvida, sendo investigados três tipos de objetivo. O primeiro busca ampliar a região estimada de atração, descrita por meio do volume estimado e do raio projetado. O segundo objetivo define a máxima energia de perturbação admissível para o sistema. Já o último, determina o ganho  $\ell_2$  entre o sinal exógeno e a saída regulada do sistema. Por fim, são apresentados os exemplos numéricos, ilustrando assim a eficácia das condições e procedimentos de otimização desenvolvidos. Dessa forma, a partir do Problema 3.1 são desenvolvidos os procedimentos de otimização para os objetivos mencionados.

Através do Lema 4.1, é possível determinar o volume da região no espaço  $\mathbb{R}^{n(\bar{d}+1)}$ , por meio da matriz  $M$ . Nesse caso, o volume  $V$  obedece à seguinte proporcionalidade

$$V \propto \frac{1}{\sqrt{\det(M)}}. \quad (4.8)$$

Para fins comparativos com os demais resultados da literatura, um corte da região estimada é realizado a partir dos estados relacionados ao máximo autovalor  $\bar{\lambda}$  da matriz  $M$ . Logo, determina-se a maior bola inscrita no elipsoide da região estimada de atração, cujo o raio é fornecido por:

$$r = \frac{1}{\sqrt{\bar{\lambda}}}. \quad (4.9)$$

Tal caracterização do volume e raio também é válida para o caso sujeito a parâmetros incertos invariantes no tempo. Considera-se o menor volume e raio entre as soluções para os  $N$  vértices do politopo do sistema, ao comparar-se com os demais resultados da literatura. Note que embora a região estimada seja maior que a bola, relacionada ao menor raio, essa comparação é adotada para evidenciar a melhoria das estimativas obtidas quando comparadas a abordagens anteriores que não usam o espaço aumentado.

## 4.2 Procedimentos de Otimização

As condições convexas desenvolvidas para síntese dos ganhos de controladores robustos e estimativa da região de atração podem ser aplicadas para explorar a otimização de

algumas características de interesse para o sistema em malha fechada, (3.6), conforme apresentado a seguir.

### 4.2.1 Maximização da estimativa da região de atração

Objetiva-se maximizar a região estimada  $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ , aproximando-a da região de atração  $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ . Nesse caso, os ganhos do controlador são calculados considerando um sistema sem ação da perturbação, ou seja,  $w_k = \mathbf{0}$ ,  $\forall k \geq 0$ .

Para a condição apresentada pelo Teorema 3.1 é possível utilizar a transformação,  $(M - \mathcal{W})^\top M^{-1}(M - \mathcal{W}) \geq \mathbf{0}$ , aplicada à (4.7), ou de forma equivalente

$$\mathbf{0} < \bar{M} = \mathcal{W}^{-1}M\mathcal{W}^{-1} \leq (2\mathcal{W} - M)^{-1} \leq \mathcal{H},$$

para

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^\top \in \mathbb{R}^{n(\bar{d}+1) \times n(\bar{d}+1)}, \quad \mathcal{W}^{-1} = \mathbf{I}_{\bar{d}+1} \otimes W^{-1}.$$

Dessa forma, maximiza-se o conjunto elipsoidal  $\mathcal{E}(\mathcal{H}, 1)$ , para um dado  $\varepsilon$ , por meio do procedimento:

$$\mathcal{J}_1 = \begin{cases} \min_{\mathcal{H}, W, M, L, G, G_{\bar{d}}, G_{d_k}, G_{\bar{d}}, \mathcal{T}, \eta, \gamma \text{ e } \delta} & \text{tr}(\mathcal{H}) \\ \text{sujeito a} & (3.29), (3.30) \text{ e } \begin{bmatrix} 2\mathcal{W} - M & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathcal{H} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.10)$$

Se (4.10) apresenta solução ótima factível, então  $\mathcal{H} \geq M$  e a minimização de  $\text{tr}(\mathcal{H})$ , leva à minimização de  $\text{tr}(\bar{M})$ .

Para a condição apresentada pelo Teorema 3.2, é possível utilizar a transformação,  $(M - \mathcal{F})^\top M^{-1}(M - \mathcal{F}) \geq \mathbf{0}$ , aplicada à (4.7), ou de forma equivalente

$$\mathbf{0} < \bar{M} = \mathcal{F}^{-\top}M\mathcal{F}^{-1} \leq (2\mathcal{F} - M)^{-1} \leq \mathcal{H},$$

para

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^\top \in \mathbb{R}^{n(\bar{d}+1) \times n(\bar{d}+1)}, \quad \mathcal{F}^{-1} = \mathbf{I} \otimes F^{-1}.$$

Logo, maximiza-se o conjunto elipsoidal  $\mathcal{E}(\mathcal{H}, 1)$  como segue:

$$\mathcal{J}_{\alpha_1} = \begin{cases} \min_{\mathcal{H}, \mathcal{F}, M, L, G, G_{\bar{d}}, G_{d_k}, G_{\bar{d}}, \mathcal{T}, \eta, \gamma \text{ e } \delta} & \text{tr}(\mathcal{H}) \\ \text{sujeito a} & (3.44), (3.45) \text{ e } \begin{bmatrix} 2\mathcal{F} - M & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathcal{H} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.11)$$

Se (4.11) apresenta solução ótima factível, então  $\mathcal{H} \geq M$  e a minimização do  $\text{tr}(\mathcal{H})$ , levam à minimização do  $\text{tr}(\bar{M})$ .

### 4.2.2 Minimização dos efeitos da perturbação

Para uma dada energia de perturbação,  $\delta^{-1}$ , a determinação dos ganhos robustos do controlador é obtida considerando a mitigação do ganho  $\ell_2$  entre a perturbação e a saída regulada do sistema, minimizando o fator  $\gamma$ , para um dado  $\bar{u}$ .

$$\mathcal{J}_2 = \begin{cases} \min_{W, M, L, G, G_d, G_{d_k}, G_{\bar{d}}, \mathcal{T} \text{ e } \eta} & \gamma \\ \text{sujeito a} & (3.29), (3.30), \delta \text{ e } \varepsilon \text{ fixos} \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\mathcal{J}_{\alpha_2} = \begin{cases} \min_{F, M, L, G, G_d, G_{d_k}, G_{\bar{d}}, \mathcal{T} \text{ e } \eta} & \gamma \\ \text{sujeito a} & (3.44), (3.45) \text{ e } \delta \text{ fixo} \end{cases} \quad (4.13)$$

### 4.2.3 Maximização da Tolerância à perturbação

Para um conjunto de condições iniciais nulas, as perturbações admissíveis são maximizadas, portanto,  $\delta^{-1}$  é o maior possível, se o sistema é regulado  $\varphi_0 = \mathbf{0}$  então  $\delta^{-1} = \eta^{-1}$ . Portanto, para o procedimento de otimização, o valor de  $\gamma$  é fixo, analisando assim a minimização do fator  $\delta$  para um dado intervalo de  $\bar{u}$ .

$$\mathcal{J}_3 = \begin{cases} \min_{W, M, L, G, G_d, G_{d_k}, G_{\bar{d}}, \mathcal{T} \text{ e } \eta} & \delta \\ \text{sujeito a} & (3.29), (3.30), \gamma \text{ e } \varepsilon \text{ fixos} \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\mathcal{J}_{\alpha_3} = \begin{cases} \min_{F, M, L, G, G_d, G_{d_k}, G_{\bar{d}}, \mathcal{T} \text{ e } \eta} & \delta \\ \text{sujeito a} & (3.44), (3.45) \text{ e } \gamma \text{ fixo} \end{cases} \quad (4.15)$$

## 4.3 Exemplos Numéricos

Para ilustrar as condições e procedimentos desenvolvidos, são apresentados dois exemplos de sistemas, sendo o primeiro precisamente conhecido com atraso constante, e o segundo com parâmetros incertos invariantes no tempo, a partir da abordagem politópica, contendo atraso variante. Todos os testes foram executados, através do software MATLAB com a implementação no YALMIP e solução pelo SeDuMi.

### 4.3.1 Sistema precisamente conhecido

Considere o sistema discreto no tempo (3.5) com matrizes precisamente conhecidas, conforme a seguir,

$$A = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.15 \\ 0.03 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \\ B_w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1], \quad D = [1], \quad (4.16)$$

o atraso constante  $\underline{d} = \bar{d} = 5$ , a entrada saturante limitada em  $\bar{u} = 15$ . O objetivo é projetar uma lei de controle saturante, com  $u_k = Kx_k$ , de forma que o sistema em malha fechada tenha o maior conjunto de condições iniciais, que tendam para origem, possível.

*Maximização da estimativa da região de atração:* utilizando-se o Teorema 3.1 é possível estimar a região de atração, como um volume de dimensão  $n(\bar{d} + 1)$ . Destaca-se que, a título de comparação com as demais condições da literatura, foi realizada uma projeção do volume da região, representada por um círculo de raio  $r$  no espaço  $\mathbb{R}^2$ , em que todos os vetores  $x_j$ , da sequência  $\varphi_{(\bar{d},k)}$  com  $j \in [0, -\bar{d}]$  possuem  $\|x_j\| \leq r$ . Além disso,  $\varepsilon = 1.1$  foi determinado, experimentalmente, através de uma grade de pontos uniformemente distribuídos com intervalo de 0.001, os quais levaram a uma solução factível com um maior valor para o raio de  $\mathcal{R}_\varepsilon$ , obtido a partir de (4.9).

Os resultados, para aplicação do Teorema 3.1, com o procedimento de otimização  $\mathcal{J}_1$  (4.10), são apresentados na Tabela 4.1 a seguir, a qual estabelece uma comparação de valores no espaço  $\mathbb{R}^2$ .

Tabela 4.1: Projeção do raio da  $\mathcal{R}_\varepsilon$  - Teorema 3.1 , procedimento  $\mathcal{J}_1$  - *exemplo 1*.

Condição	Projeção do raio da $\mathcal{R}_\varepsilon$
(de Souza <i>et al.</i> , 2019)	112.78
(Teorema 3.1 - $\mathcal{J}_1$ ) $_{\varepsilon=1.1}$	97.958
(Teorema 3.1 - $\mathcal{J}_1$ ) $_{\varepsilon=1.9052}$	90.8575
(Castro <i>et al.</i> , 2020) $_{\varepsilon=1.9052}$	74.558
(Zhang <i>et al.</i> , 2011)	73.693
(Chen <i>et al.</i> , 2019)	72.596
(Chen <i>et al.</i> , 2014)	68.491
(Xu <i>et al.</i> , 2012)	63.029

Observa-se que, o resultado obtido a partir do Teorema 3.1 e procedimento de otimização  $\mathcal{J}_1$ , apresenta um aumento do raio de aproximadamente 21.86% com  $\varepsilon = 1.9052$  e 29.10% para  $\varepsilon = 1.1$ , se comparado à solução apresentada em Castro *et al.* (2020). Além disso, uma análise do volume total da região  $\mathcal{R}_\varepsilon$ , com dimensão  $\mathbb{R}^{12}$ , foi realizada a partir (4.8). Dessa forma, por meio do procedimento  $\mathcal{J}_1$  com  $\varepsilon = 1.9052$ , obteve-se um volume de  $3.3089 \times 10^{30}$ , ou seja, um aumento de  $9.0192 \times 10^4\%$  em relação ao procedimento apresentado em (Castro *et al.*, 2020), com um valor de  $3.6646 \times 10^{27}$ . A comparação em questão foi realizada utilizando as matrizes L-K encontradas pela abordagem em (Castro *et al.*, 2020), substituindo-as no conjunto de níveis (4.6). Sendo assim, o aumento do volume da região relaciona-se com a escolha da função objetivo, em que a abordagem apresentada no presente trabalho é construída a partir da regra de formação geral (4.7), a qual não realiza simplificações ou majorações em sua construção.

A projeção do raio apresentada em (de Souza *et al.*, 2019), abordagem em sistema aumentado, dependente de todos os estados atrasados, mostrou-se 15% maior que o Teorema

3.1 com procedimento de otimização  $\mathcal{J}_1$ . Porém, a complexidade numérica despendida para tais soluções é expressivamente maior, sendo obtida a partir das variáveis e linhas  $\mathcal{K}_c$  e  $\mathcal{L}_c$ , conforme a seguir.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_c &= [2n(\bar{d} + 1) + m + q + l]N\hat{t}[\hat{t}^2 - (\hat{t} - \Delta\tau_{\max})(\bar{d} - \Delta\tau_{\max} - 1)] + [n(\bar{d} + 1) + 1]N\hat{t}m, \\ \mathcal{K}_c &= 0.5n^2(\bar{d} + 1)^2(N\hat{t} + 2) + 0.5n(\bar{d} + 1)N\hat{t} + m[2n(\bar{d} + 1) + 1] + 1.\end{aligned}$$

com  $\hat{t} = (\bar{d} - \underline{d} + 1)$ , e  $\Delta\tau_{\max}$  o máximo intervalo do atraso.

Nota-se que,  $\mathcal{K}_c$  e  $\mathcal{L}_c$ , (de Souza *et al.*, 2019), tem dependência direta com  $\bar{d}$ , atraso máximo, tornando a complexidade numérica significativamente elevada, comparado a apresentada no Teorema 3.1, especialmente para valores maiores de atraso. Neste exemplo,  $\mathcal{K}_c = 247$  e  $\mathcal{L}_c = 38$  enquanto  $\mathcal{K}_1$  e  $\mathcal{L}_1$ , apresentados na observação (3.1), são iguais a 99 e 44 respectivamente. Portanto, a proposta apresentada no Capítulo 3 reduz significativamente o número de variáveis de otimização, diminuindo a complexidade computacional para obtenção da solução em relação à abordagem encontrada em (de Souza *et al.*, 2019).

Adotando-se as soluções as quais proporcionaram a maior projeção de raio, ou seja,  $\mathcal{J}_1$  com  $\varepsilon = 1.1$ , assume-se a sequência de estados iniciais  $\varphi_0$  tal qual

$$\varphi_0 = \left\{ \begin{bmatrix} -110.4 \\ 110.4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 60 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -60 \\ -30 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 63 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -40 \\ 70 \end{bmatrix} \right\}, \quad (4.17)$$

com normas  $\|\varphi_0\| = 156.1292$  e  $\|\Delta\varphi_0\| = 124.4548$ , obtidas a partir de (4.1) e (4.2), respectivamente.

Embora a maior projeção de raio seja para a escolha de  $\varepsilon = 1.1$ , o maior volume de  $\mathcal{R}_\varepsilon$  foi obtido com  $\varepsilon = 1.9052$ . Logo, nota-se que a variável  $\varepsilon$  interfere diretamente na factibilidade e nos resultados do volume e raio da região estimada de atração. A figura a seguir representa o corte da região para  $x_k$ , bem como a convergência dos estados, sujeitos ao vetor de condições iniciais (4.17), para a origem.

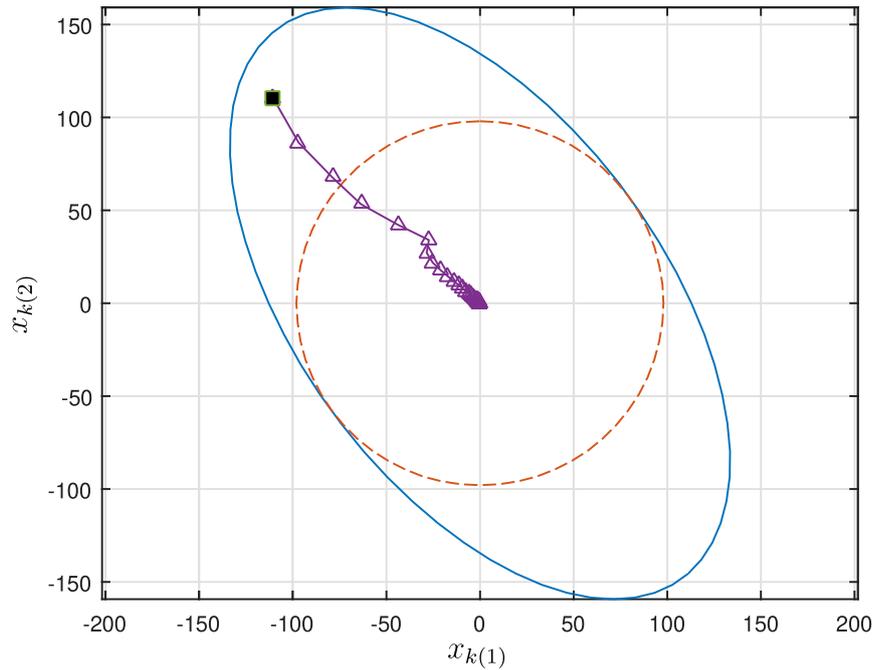


Figura 4.1: Convergência dos estados para a origem partindo-se da condição inicial  $\varphi_0$ . Solução obtida a partir do procedimento de otimização  $\mathcal{J}_1$  com  $\varepsilon = 1.1$ .

Através da Figura 4.1 observa-se que a solução, determinada pelo Teorema 3.1, garante a convergência dos estados para a origem, conforme apresentado pela **curva em roxo**. Nota-se também que, o vetor  $x_0 = [-110.4 \ 110.4]^\top$ , da sequência (4.17), está localizado fora do círculo inscrito na elipse **curva tracejada em vermelho**. Sendo assim, a análise das condições iniciais restritas apenas à região do raio pode ser considerada conservadora. Além disso, o elipsoide retratado a partir da **curva contínua em azul**, representa os limites dos valores possíveis dos estados para condições iniciais. Por fim, o comportamento da ação de controle determinada pelos ganhos  $K = [-0.7079 \ -0.3473]$ , necessária para levar os estados para origem, pode ser observado a partir da Figura 4.2.

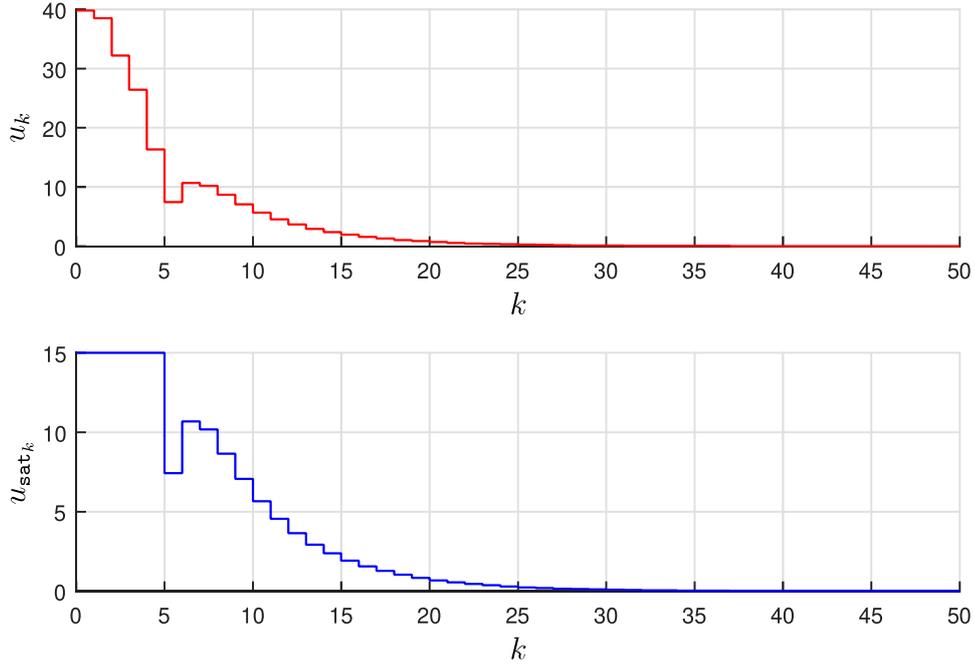


Figura 4.2: Comparação entre o sinal de controle e sinal de controle saturado. Solução obtida a partir do procedimento de otimização  $\mathcal{J}_1$  com  $\varepsilon = 1.1$ .

A partir da Figura 4.2 nota-se que há uma maior exigência do sinal de controle nas 5 primeiras iterações, o que pode ser observado pela **curva em vermelho**, não saturada, apresentando valores de  $u_k$  maiores que 15. Tal ação de controle, mais severa nas primeiras iterações, deve-se ao fato do sistema considerar estados atrasados. Logo, para  $\bar{d} = 5$ , os efeitos de uma condição inicial, com valores de  $x_0$  elevados serão reverberados até a 5 interação, exigindo-se mais da ação do controlador, durante este intervalo. Devido às limitações físicas impostas à  $u_k$ , o sinal de controle aplicado ao sistema é saturado, conforme observado através da **curva em azul**.

Para uma condição inicial localizada na borda do elipsoide da projeção de  $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ , assume-se valores menores para os estados atrasados, devido ao fato de que o volume do elipsoide constitui uma geometria irregular, com representação visual impraticável. Desta forma, é necessário que a sequência de estados atrasados esteja contemplada nas soluções factíveis, dentro dos conjuntos contrativos, tal qual (4.6). Logo, uma escolha que atende tais considerações pode ser observada a partir de

$$\varphi_0 = \left\{ \begin{bmatrix} -110.4 \\ 145.4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \right\},$$

com norma  $\|\varphi_0\| = 182.5632$ , obtida a partir de (4.1).

Outra abordagem relevante consiste em fixar valores de atrasos maiores, conseqüentemente, não será possível adotar  $x_0$  no limiar da projeção do elipsoide gerado, tal repre-

sentação pode ser observada a partir da sequência de condições iniciais a seguir

$$\varphi_0 = \left\{ \begin{bmatrix} -103 \\ 103 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 37 \\ 64 \end{bmatrix} \right\}, \quad (4.18)$$

com  $\|\varphi_0\| = 145.66$ , calculada por meio da equação (4.1).

Sendo a solução apresentada no Teorema 3.1 dependente de  $\varepsilon$ , se faz necessária uma análise elaborada das escolhas desta variável escalar dentro do intervalo  $]0,2[$ , tal discussão será melhor detalhada a seguir.

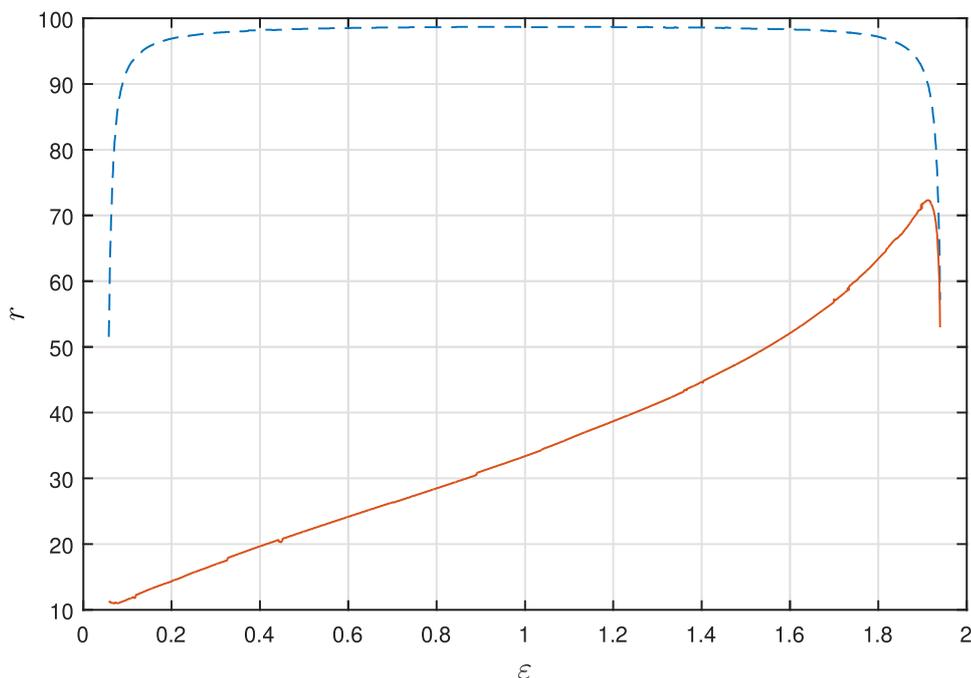


Figura 4.3: Comparação entre a solução do Teorema 3.1 e a apresentada em (Castro *et al.*, 2020) para o raio da estimativa da região de atração ao longo da variação de  $\varepsilon$ , para o sistema (4.16).

A partir da Figura 4.3 observa-se que os resultados, para o raio da região estimada de atração, são dependentes da variável  $\varepsilon$ . Nota-se que para o Teorema 3.1, **curva tracejada em azul**, tem-se uma evolução dos valores do raio de 50.59 até 97.95, no intervalo de 0.005 a 0.6 para  $\varepsilon$ . Em seguida, o valor do raio permanece próximo de 97.95 até  $\varepsilon = 1.4$  decaindo no intervalo de  $1.4 \leq \varepsilon \leq 1.948$ . Logo, existe um conjunto de valores ótimos de  $\varepsilon$ , para os quais se tem um maior raio da região estimada de atração. Assim, a partir da curva analisada, observa-se que para o exemplo em questão deve-se escolher  $\varepsilon$  entre 0.6 e 1.4.

Para a solução apresentada em (Castro *et al.*, 2020), **curva contínua em vermelho**, dependente da expansão de  $H_j$  ponderada por um vetor de variáveis escalares  $\beta$ , nota-se um crescimento do raio partindo de 10.19 até 74.558, seguindo um comportamento

diferente do apresentado pelo Teorema 3.1. Sendo assim, existem poucos valores de  $\varepsilon$ , para os quais o raio estimado é o melhor possível.

Portanto, os resultados apresentados na Figura 4.3 corroboram com a regra de formação geral desenvolvida, reduzindo o conservadorismo das soluções, por meio da escolha da função objetivo e da caracterização da região de atração, o que por sua vez, reduz, os efeitos da escolha de  $\varepsilon$ .

O Teorema 3.2, que considera as matrizes do funcional de L-K dependentes de parâmetros incertos invariantes no tempo, pode ser empregado também para o caso precisamente conhecido. Dessa forma, a não dependência da variável escalar  $\varepsilon$  reduz o conservadorismo e complexidade para obtenção das soluções. A Tabela 4.2 apresenta um comparativo da estimativa da região de atração para as condições desenvolvidas neste trabalho.

Tabela 4.2: Região de Atração - Teoremas 3.2 e 3.1, procedimentos  $\mathcal{J}_{\alpha_1}$  e  $\mathcal{J}_1$  *exemplo 1*.

Condição	Projeção do raio da $\mathcal{R}_\varepsilon$	Volume de $\mathcal{R}_\varepsilon$
Teorema 3.2 - $\mathcal{J}_{\alpha_1}$	98.5016	$3.1531 \times 10^{31}$
Teorema 3.1 - $\mathcal{J}_{1\varepsilon=1.1}$	97.958	$3.2935 \times 10^{30}$

A partir da Tabela 4.2, observa-se que há um aumento de 0.5549%, no valor do raio, entre a solução do Teorema 3.2 procedimento  $\mathcal{J}_{\alpha_1}$  e a solução do Teorema 3.1 procedimento  $\mathcal{J}_1$ . Porém, ao comparar-se os resultados em termos do volume de  $\mathcal{R}_\varepsilon$ , é observado um aumento significativo, de 845.9%, calculado, em todos os casos, a partir do volume relativo, em que a solução menos conservadora é apresentada no Teorema 3.2. Logo, a análise do volume mostra-se mais assertiva para descrição da estimativa da região de atração.

Dessa forma, assume-se a sequência de estados iniciais  $\varphi_0$  com atraso fixo tais quais

$$\varphi_{0(\mathcal{J}_{\alpha_1})} = \left\{ \begin{bmatrix} -110.4 \\ 149.9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

Com uma norma  $\|\varphi_{0(\mathcal{J}_{\alpha_1})}\| = 186.167$ , obtida por meio de (4.1).

Assumindo-se variações nos estados atrasados é possível determinar sequências de condições iniciais tais como a seguir

$$\varphi_{0(\mathcal{J}_{\alpha_1})} = \left\{ \begin{bmatrix} -110.4 \\ 131.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 60 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -60 \\ -30 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 63 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -40 \\ 70 \end{bmatrix} \right\},$$

com uma norma  $\|\varphi_{0(\mathcal{J}_{\alpha_1})}\| = 171.698$ , mantendo-se  $\|\Delta\varphi_0\| = 124.4548$ , calculados a partir de (4.1) e (4.2).

Logo, observa-se que, mantendo-se os estados atrasados dispostos em (4.17) a partir do Teorema 3.2, é possível aumentar a norma em 9.971%. Além disso, comparando-se com o vetor de estados aumentados, apresentado em (4.18), é possível expandir para

$$\varphi_{0(\mathcal{J}_{\alpha_1})} = \left\{ \begin{bmatrix} -106.9 \\ 106.9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 37 \\ 64 \end{bmatrix} \right\}$$

Sendo a norma de  $\varphi_{0(\mathcal{J}_{\alpha_1})}$ , obtida por meio de (4.1), 56.39% maior que a apresentada em (Castro *et al.*, 2020), a saber 96.6615.

A eficácia das soluções, em termos da complexidade numérica, foi avaliada comparando-se o número de variáveis e linhas,  $\mathcal{K}_c = 247$  e  $\mathcal{L}_c = 38$ , respectivamente, apresentados por (de Souza *et al.*, 2019) com  $\mathcal{K}_{\mathcal{J}_{\alpha_1}} = 40$  e  $\mathcal{L}_{\mathcal{J}_{\alpha_1}} = 47$ , obtidos pelo Teorema 3.2, procedimento de otimização  $\mathcal{J}_{\alpha_1}$ . Além disso, de acordo com Peaucelle *et al.* (2002), a complexidade numérica pode ser expressa, para o software SeDuMi, por  $\mathcal{K}^2\mathcal{L}^{2.5} + \mathcal{L}^{3.5}$ . Dessa forma, obtém-se boas soluções mantendo-se uma complexidade numérica razoável, observando-se a complexidade relativa em relação à (de Souza *et al.*, 2019) tem-se uma diferença de  $2.078 \times 10^3\%$  para uma diferença de 14.49% na projeção do raio da  $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ .

Além da expansão da região de atração, é possível realizar a análise dos sinais exógenos, podendo considerar a minimização dos efeitos da perturbação além da maximização da tolerância à perturbação, fatores os quais são demonstrados a seguir.

*Minimização dos efeitos da perturbação:* Sabendo-se a magnitude da energia de perturbação  $\delta^{-1}$ , é possível minimizar os efeitos dos sinais exógenos na saída regulada a partir do fator  $\gamma$ , que pode ser determinado através do Teorema 3.1 com o procedimento de otimização  $\mathcal{J}_2$ , apresentado em (4.12).

Escolhendo-se a energia de perturbação  $\delta^{-1} = 625$  aplicada ao sistema (4.16) com o atraso constante  $\underline{d} = \bar{d} = 5$ , a entrada saturante limitada em  $\bar{u} = 15$  e o escalar  $\varepsilon = 1.884$ , a saída regulada possui os efeitos da perturbação mitigados, ponderados por  $\gamma$ , o qual foi minimizado para o valor de 1.06.

Para uma condição inicial nula, dada pela sequência  $\varphi_0 = \mathbf{0}$ , o sinal exógeno foi aplicado a partir de  $k = 10$ , sendo limitado por  $\|w\|_2^2 \leq 625$ , construído a partir de  $\|w\|_2^2 \leq \delta^{-1}$ , sendo

$$w = [\mathbf{0}_{1,i} \quad w_{i+1} \quad w_{i+2} \quad w_{i+3} \quad \mathbf{0}_{i+4,k}],$$

com  $w_{i+1} = \cos(\theta)\sqrt{\delta^{-1}}$ ,  $w_{i+2} = \sqrt{\delta^{-1} - w_{i+1}^2 - w_{i+3}^2}$ ,  $w_{i+3} = \sin(\theta)\sqrt{\delta^{-1}}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . Garante-se assim, um sinal de perturbação com amplitude fornecida a partir de  $\delta$ , em que os dois instantes,  $k = i + 1$  e  $k = i + 3$ , são não nulos. Dessa forma,  $i$  é escolhido para instantes  $k$ , em que as condições iniciais tenham atingido o regime permanente. Para o presente exemplo,

$$w = [\mathbf{0}_{1,9} \quad w_{10} \quad w_{11} \quad w_{12} \quad \mathbf{0}_{13,k}], \quad (4.19)$$

com  $w_{10} = \cos(\theta)\sqrt{625}$ ,  $w_{11} = \sqrt{625 - w_{10}^2 - w_{12}^2}$ ,  $w_{12} = \sin(\theta)\sqrt{625}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

Logo, a ação da perturbação aplicada ao sistema (4.16) pode ser observada a partir da figura abaixo.

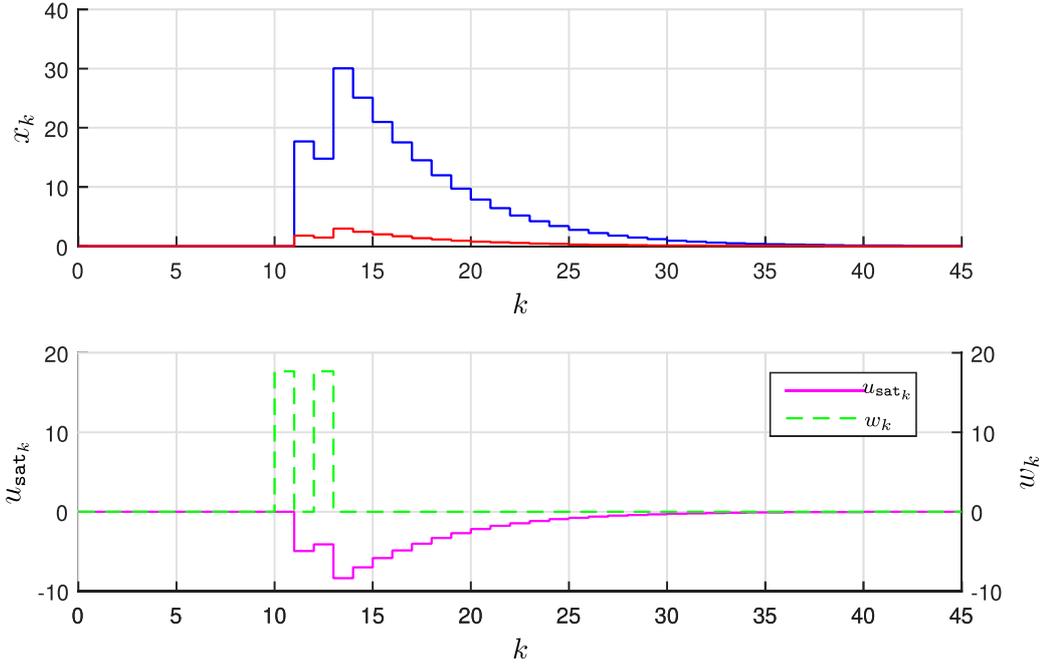


Figura 4.4: Convergência dos estados para o sistema sujeito ao sinal exógeno  $w_k$ . Solução obtida a partir do Teorema 3.1 e procedimento de otimização  $\mathcal{J}_2$  com  $\varepsilon = 1.884$ .

A partir da Figura 4.4 observa-se que o estado  $x_{k(1)}$ , em azul, sofre maior impacto comparado ao segundo estado, em vermelho, devido a ação de  $w$  ser ponderada pela matriz  $B_w = [1 \ 0.1]^\top$  em que  $x_{k(2)}$  é multiplicado pelo termo 0.1. Observa-se que o sinal de perturbação, curva em verde, construído conforme (4.19), foi aplicado em dois instantes, excitando o sistema com picos determinados a partir de  $\|w\|_2^2 \leq 625$ . Além disso, através do sinal de controle, curva em magenta, delimitado pelos ganhos  $K = [-0.2535 \ 0.2568]$ , nota-se que a ação de controle necessária para rejeitar a perturbação, ocorre entre  $k = 10$  e  $k = 35$ .

*Maximização da Tolerância à perturbação:* determinou-se a máxima energia de perturbação admissível do sistema (4.16) minimizando-se  $\delta$  através da aplicação do Teorema 3.1 com o procedimento  $\mathcal{J}_3$ , fixando-se  $\gamma = 0.5$ . Dessa forma, a síntese do controlador robusto é capaz de levar os estados para a origem, garantindo que o sistema atinja o regime permanente, além de rejeitar os efeitos da perturbação para um sinal exógeno limitado pela energia  $\delta^{-1}$ . Sendo determinada assim uma  $\mathcal{R}_\varepsilon$  em  $\mathcal{L}_\gamma(\beta)$ , conforme apresentado em (4.6), em que  $V(\bar{x}_k) \leq \|w\|_2^2 + V(\bar{x}_0) \leq \delta^{-1} + \beta^{-1} = \eta^{-1}$ . Portanto, constrói-se  $w$ , a partir do valor de energia otimizado, limitado por  $\|w\|_2^2 \leq 460$ , conforme a seguir.

$$w = [\mathbf{0}_{1,9} \ w_{10} \ w_{11} \ w_{12} \ \mathbf{0}_{13,k}],$$

sendo  $w_{10} = \cos(\theta)\sqrt{460}$ ,  $w_{11} = \sqrt{460 - w_{10}^2 - w_{12}^2}$ ,  $w_{12} = \sin(\theta)\sqrt{460}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

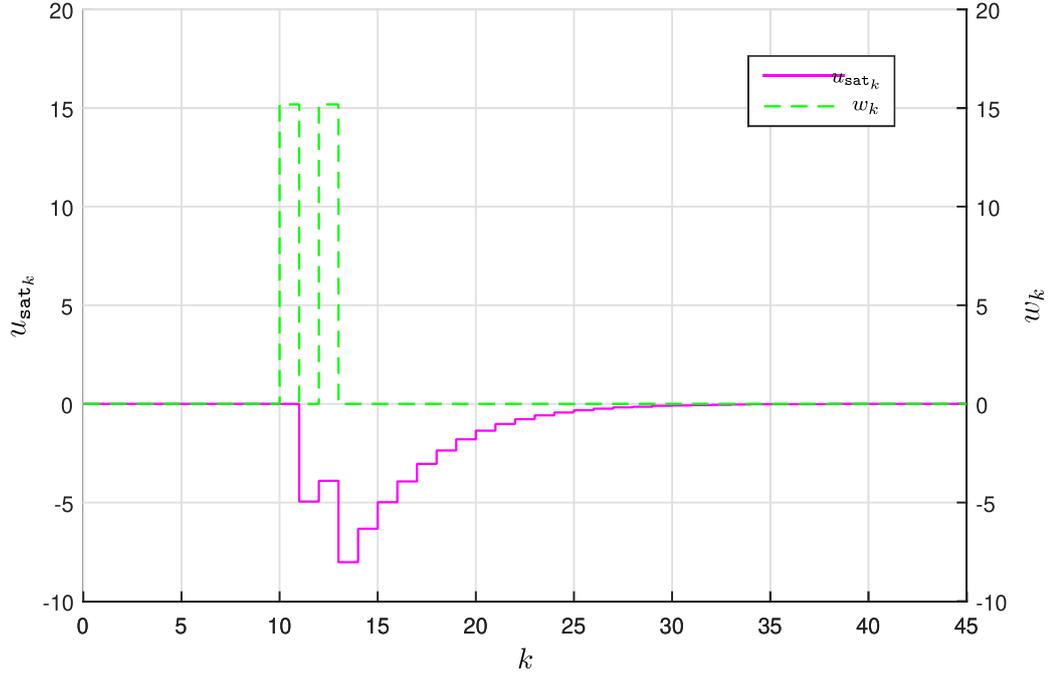


Figura 4.5: Sinal de controle  $u_{sat}$  e sinal exógeno  $w_k$  - Solução obtida a partir do Teorema 3.1 procedimento de otimização  $\mathcal{J}_3$  com  $\varepsilon = 1.884$ .

A partir da Figura 4.5, observa-se que os valores de pico do sinal exógeno, em  $w_{10}$  e  $w_{12}$ , **curva tracejada em verde**, são iguais à 15.18. Além disso, os ganhos do controlador robusto  $K = [-0.3054 \quad 0.2132]$ , calculados a partir da Teorema 3.1 e procedimento de otimização  $\mathcal{J}_3$ , promovem a ação de controle, necessária para mitigar os efeitos gerados pela energia de perturbação de  $w$ . Por fim, nota-se que a ação de controle saturada, **curva em magenta**, age após a aplicação do sinal de perturbação, levando os estados novamente para a origem, não ultrapassando o limite de saturação  $\bar{u} = 15$ .

A análise do ganho  $\ell_2$  e da máxima energia de perturbação pode ser comparada, estabelecendo uma relação entre as escolhas de  $\gamma$  e  $\delta^{-1}$  ao longo das limitações de energia do controlador. Adotando-se uma variação de energia  $\delta^{-1}$  entre 150 e 250 obteve-se os resultados apresentados na Figura 4.12.

Para procedimento  $\mathcal{J}_2$ , ao fixar-se o valor de  $\delta$  nota-se um decaimento de  $\gamma$  ao longo da variação dos limites de saturação. Dessa forma, quanto maior for  $\bar{u}$ , mais energia o sistema pode empregar para levar os estados do sistema para a origem. Além disso, para valores de  $\bar{u}$  elevados atinge-se um ponto ótimo para  $\gamma$  próximo de 0.1, para qualquer  $\delta$  nos intervalos testados. Nota-se através da Figura 4.12 que quanto maior for a energia admissível de perturbação, maiores serão os valores mínimos de  $\gamma$ . Tal fator pode ser observado comparando-se a **curva contínua em verde** com a **curva tracejada em vermelho**. Ambos resultados buscam mitigar os efeitos da perturbação na saída regulada porém,

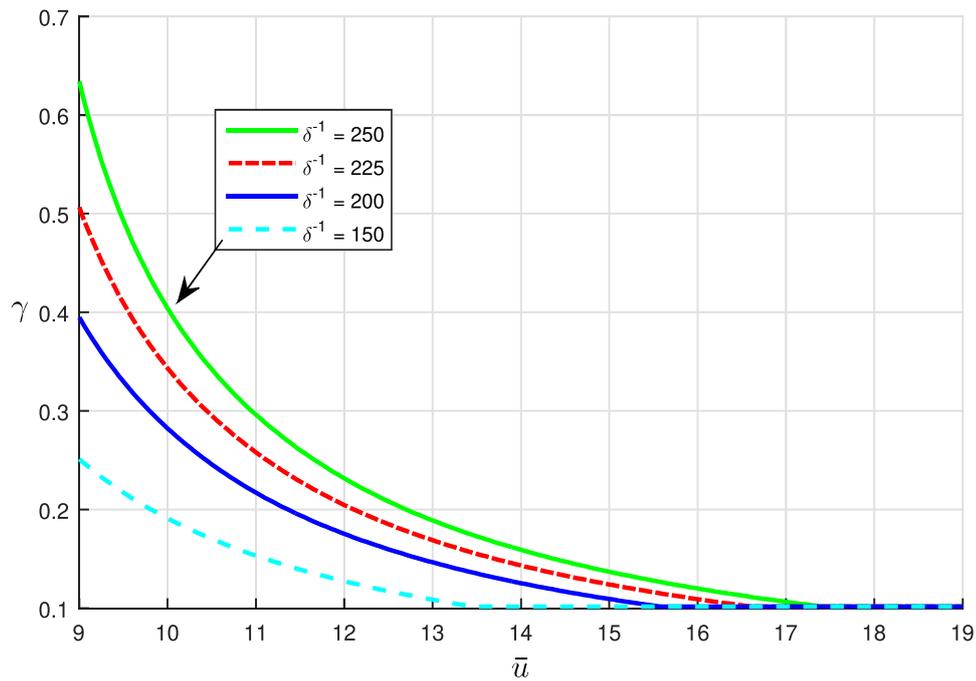


Figura 4.6: Procedimento de otimização  $\mathcal{J}_3$  Teorema 3.1, para valores fixos de  $\delta$  ao longo da variação de  $\bar{u}$  com  $\varepsilon = 1.1$ .

para um mesmo limite de saturação, obtém-se valores ótimos menores de  $\gamma$  ao fixar-se valores menores de  $\delta$ .

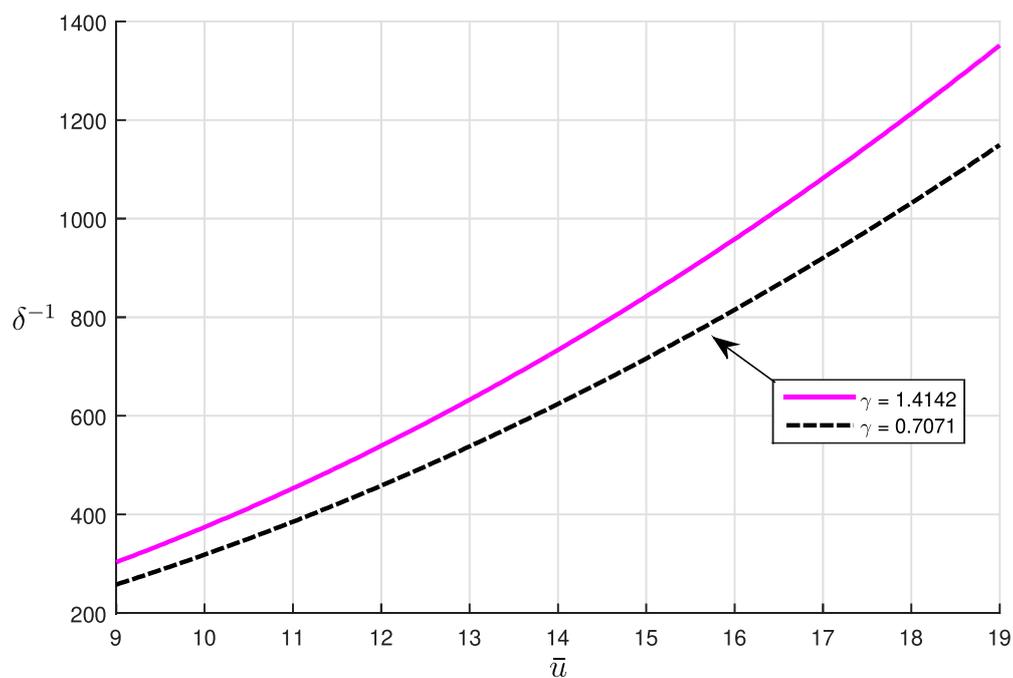


Figura 4.7: Procedimento de otimização  $\mathcal{J}_2$  Teorema 3.1, para valores fixos de  $\gamma$  ao longo da variação de  $\bar{u}$ . com  $\varepsilon = 1.1$ .

A partir da Figura 4.13, fixando-se o valor de  $\gamma = 0.7071$  por meio do procedimento de otimização  $\mathcal{J}_3$ , curva tracejada em preto, nota-se que a energia admissível aumenta, variando de 250 a  $1.1 \times 10^3$  ao longo do relaxamento da limitação da ação de controle para  $9 \leq \bar{u} \leq 19$ . Para  $\gamma = 1.4142$ , **curva contínua em magenta**, observa-se maiores valores de energia,  $300 \leq \delta^{-1} \leq 1.351 \times 10^3$  ao longo da variação de  $\bar{u}$ .

Comparando-se os resultados apresentados nas Figuras 4.12 e 4.13 observa-se que para a variação no limite de saturação há um comportamento inversamente proporcional entre  $\gamma$  e  $\delta$ . A Tabela 4.3 apresenta o comparativo dos resultados obtidos a partir dos Teoremas 3.1 e 3.2.

Tabela 4.3: Minimização  $\gamma$  e  $\delta$  - comparação dos procedimentos  $\mathcal{J}_2$  com  $\mathcal{J}_{\alpha_2}$  e  $\mathcal{J}_3$  com  $\mathcal{J}_{\alpha_3}$  *exemplo 1*.

Condição	$\delta^{-1}$ fixo	$\gamma$
Teorema 3.1 - $\mathcal{J}_{2\varepsilon=1.884}$	625	1.06
Teorema 3.2 - $\mathcal{J}_{\alpha_2}$	625	2.0449
Teorema 3.1 - $\mathcal{J}_{2\varepsilon=1.884}$	62.5	0.46
Teorema 3.2 - $\mathcal{J}_{\alpha_2}$	62.5	0.3828
Condição	$\gamma$ fixo	$\delta^{-1}$
Teorema 3.1 - $\mathcal{J}_{3\varepsilon=1.884}$	1	625
Teorema 3.2 - $\mathcal{J}_{\alpha_3}$	1	304
Teorema 3.1 - $\mathcal{J}_{3\varepsilon=1.884}$	0.5	460
Teorema 3.2 - $\mathcal{J}_{\alpha_3}$	0.5	102

Observa-se que o Teorema 3.2 é mais sensível às escolhas de  $\delta$  e  $\gamma$ . Dessa forma, variando-se  $\gamma$  de 1 para 0.5 nota-se uma queda de 198% no valor da energia, para o procedimento  $\mathcal{J}_{\alpha_3}$ , enquanto  $\mathcal{J}_3$  apresenta apenas 36%. Além disso, é possível perceber que, fixando-se  $\delta^{-1}$  em torno de 62.5,  $\gamma$  apresenta valores próximos comparando-se os procedimentos  $\mathcal{J}_{\alpha_2}$  e  $\mathcal{J}_2$ .

### 4.3.2 Sistema com variação de parâmetros

*Exemplo 2:* Considere o sistema discreto no tempo (3.5), com os vértices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.38 & 0.2 \\ 0.09 & 1.0 \end{bmatrix}, A_{d_1} = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.03 \\ 0.02 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1.98 \\ 0.99 \end{bmatrix},$$

$$B_{w_1} = \begin{bmatrix} 1.98 \\ 0.99 \end{bmatrix}, C_1 = [1 \ 0], D_1 = 1. \quad (4.20)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.42 & 0.2 \\ 0.11 & 1.0 \end{bmatrix}, A_{d_2} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.09 \\ 0.04 & 0.06 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 2.02 \\ 1.01 \end{bmatrix},$$

$$B_{w_2} = \begin{bmatrix} 2.02 \\ 1.01 \end{bmatrix}, C_2 = [0 \ 1], D_2 = 0. \quad (4.21)$$

Com atraso  $2 \leq d_k \leq 4$  e a entrada saturante limitada em  $\bar{u} = 10$ . Dessa forma, deseja-se projetar uma lei de controle saturante, com  $u_k = Kx_k$ , para que o sistema em malha fechada possua o maior conjunto de condições iniciais possível.

*Maximização da estimativa da região de atração:* utilizando-se o Teorema 3.1 e o procedimento  $\mathcal{J}_1$ , estima-se a região de atração de forma análoga ao *exemplo 1*.

A Tabela 4.4 apresenta uma comparação do volume da região em  $\mathbb{R}^{12}$ , e dos valores do raio projetado no espaço  $\mathbb{R}^2$ , calculado através de (4.9).

Tabela 4.4: Região de Atração - Teorema 3.1, procedimento  $\mathcal{J}_1$  - *exemplo 2*.

Condição	Projeção do raio da $\mathcal{R}_\varepsilon$	Volume da $\mathcal{R}_\varepsilon$
Teorema 3.1 - $\mathcal{J}_{1\varepsilon=1.281}$	93.970	$9.137 \times 10^{24}$
Teorema 3.1 - $\mathcal{J}_{1\varepsilon=1.678}$	85.590	$8.368 \times 10^{23}$
(Castro <i>et al.</i> , 2020) $_{\varepsilon=1.678}$	55.470	$2.944 \times 10^{22}$

Além disso, nota-se que o raio e volume, obtidos pelo Teorema 3.1,  $\varepsilon = 1.678$ , apresentam um aumento de 54.3% e  $2.742 \times 10^3\%$ , respectivamente, em relação a solução apresentada em (Castro *et al.*, 2020). Adotando-se o Teorema 3.1 com  $\varepsilon = 1.281$ , é possível notar um aumento de 69.41% para o raio e  $3.094 \times 10^4\%$  para o volume da região estimada de atração. A comparação da superfície foi realizada utilizando as matrizes de L-K, encontradas pela abordagem em (Castro *et al.*, 2020), substituindo-as no conjunto de níveis (4.6). Tal melhoria é esperada, uma vez que, as condições do trabalho referenciado foram expandidas e submetidas à uma nova função objetiva e caracterização da  $\mathcal{R}_\varepsilon$ , sendo ambas determinadas pela regra de formação geral da candidata de L-K, conforme (4.7). Sendo o Teorema 3.1 dependente de  $\varepsilon$ , analisa-se os efeitos da escolha dessa da variável escalar no intervalo  $]0,2[$ .

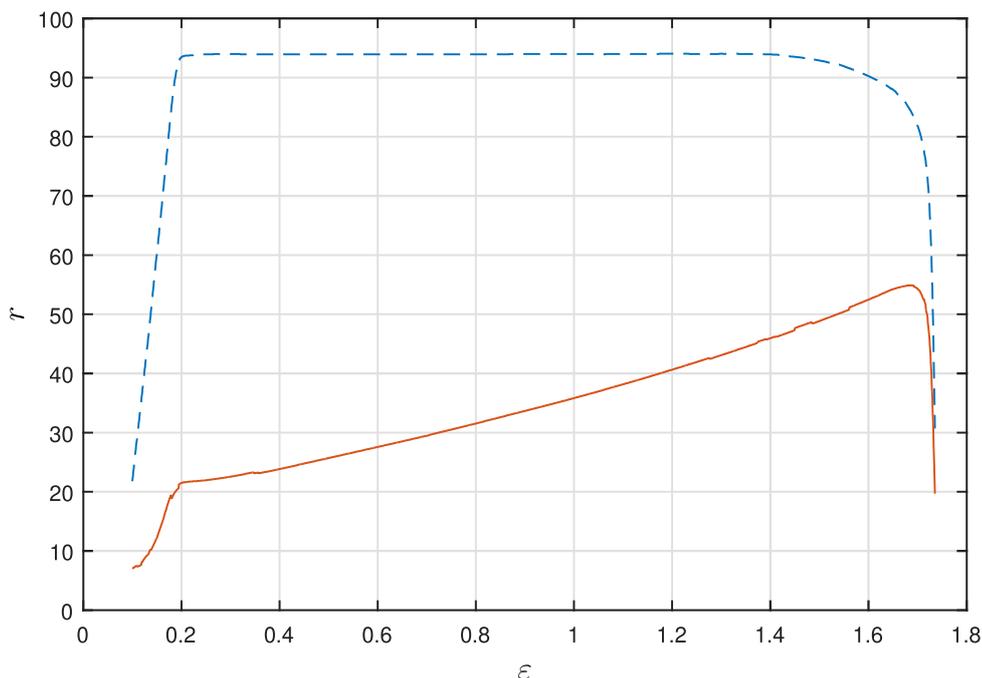


Figura 4.8: Comparação do raio da região estimada de atração, ao longo da variação de  $\varepsilon$ , relacionando o Teorema 3.1 e a solução apresentada por (Castro *et al.*, 2020).

A partir da Figura 4.8 observa-se que, para o Teorema 3.1, **curva tracejada em azul**, o valor do raio estimado, varia de 22.380 a 93.970 no intervalo de  $0.101 \leq \varepsilon \leq 0.202$ . Já para o intervalo  $0.202 < \varepsilon < 1.4$ , o valor do raio se mantém próximo de 93.970, apresentando uma diminuição quando  $\varepsilon > 1.4$ . Para a condição apresentada em (Castro *et al.*, 2020), **curva contínua em vermelho**, nota-se uma evolução do raio partindo de 7.870 até 21.590, no intervalo  $0.101 \leq \varepsilon \leq 0.202$ . Porém, existem poucos valores de  $\varepsilon$ , para os quais o raio estimado é o melhor possível, a solução ótima pode ser observada em  $\varepsilon = 1.678$ . Logo, nota-se que a utilização da regra de formação geral (4.7), na determinação da função objetivo e caracterização da região de atração, emprega menos conservadorismo comparado a solução apresentada por Castro *et al.* (2020).

Diferentemente do Teorema 3.1, o Teorema 3.2 apresenta matrizes do funcional de Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetros incertos e invariantes no tempo, o que reduz o conservadorismo das condições. Além disso, para este caso, não há dependência com a variável escalar  $\varepsilon$ , o que reduz a complexidade para obtenção das soluções, uma vez que não é necessário fixar valores para garantir uma solução ótima factível. A Tabela 4.5 apresenta o comparativo dos teoremas desenvolvidos.

Comparando-se o Teorema 3.1, procedimento  $\mathcal{J}_1$ , com o Teorema 3.2 procedimento,  $\mathcal{J}_{\alpha_1}$ , observa-se um aumento de 0.246% do valor do raio e de 93.28% para o volume da  $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ . O Teorema 3.2 apresenta uma solução menos conservadora, já que as matrizes

Tabela 4.5: Estimativa da  $\mathcal{R}_\mathcal{E}$  - Teorema 3.2 , procedimento  $\mathcal{J}_{\alpha_1}$ , *exemplo 2*.

Condição	Projeção do raio da $\mathcal{R}_\mathcal{E}$	Volume da $\mathcal{R}_\mathcal{E}$
Teorema 3.2 - $\mathcal{J}_{\alpha_1}$	94.2012	$1.766 \times 10^{25}$
Teorema 3.1 - $\mathcal{J}_{1\varepsilon=1.281}$	93.970	$9.137 \times 10^{24}$
Teorema 3.1 - $\mathcal{J}_{1\varepsilon=1.678}$	85.590	$8.368 \times 10^{23}$
(Castro <i>et al.</i> , 2020) $_{\varepsilon=1.678}$	55.470	$2.944 \times 10^{22}$

da candidata a função de Lyapunov-Krasovskii, denotadas por  $P_i, Q_{1_i}, Q_{2_i}, Z_{1_i}, Z_{2_i}$ , também assumem variação de parâmetro. Dessa forma, a região de atração é composta pela intersecção de duas regiões com volume em  $\mathbb{R}^{12}$ , o que por sua vez, garante uma melhor representação para  $\mathcal{R}_\mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}_\mathcal{A}$ .

Uma análise relevante consiste em observar o comportamento de condições iniciais, localizadas na borda da região projetada. Sendo assim, as sequências

$$\varphi_{0(1)} = \left\{ \begin{bmatrix} -308 \\ 82 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\varphi_{0(2)} = \left\{ \begin{bmatrix} 308 \\ -82.2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \right\},$$

com norma 318.78 e 318.72 respectivamente, calculadas a partir de (4.1), possuem estados atrasados fixados e estados atuais no limiar de  $\mathcal{R}_\mathcal{E}$ .

A Figura 4.9 apresenta uma projeção, em  $\mathbb{R}^2$ , da estimativa da região de atração formada pela casca da intersecção das elipses. Além disso, apresenta a convergência dos conjuntos de condições iniciais,  $\varphi_{0(1)}$  e  $\varphi_{0(2)}$ . Sendo assim, nota-se que os limites das sequências de condições iniciais, para estados atrasados com valores relativamente pequenos, formam uma região convexa, a qual é construída a partir da intersecção de duas regiões, geradas por meio dos vértices (4.20) e (4.21) do sistema. Observa-se também que, as escolhas de condições iniciais fora de  $\mathcal{R}_\mathcal{E}$ , porém próximas da casca, com a sequência de estados atrasados nula, apresentam soluções divergentes, demonstrando que a projeção da região estimada é uma boa aproximação para a região de atração  $\mathcal{R}_\mathcal{A}$ . Além disso, a evolução das trajetórias, partindo de  $\varphi_{0(1)}$ , podem ser observadas pelas linhas tracejadas em **vermelho** e **magenta**, representando a convergência dos estados para o sistema na configuração de cada vértice do politopo. Somado à isto, as trajetórias geradas por  $\varphi_{0(2)}$ , linhas tracejadas em preto (vértice (4.20)) e **verde** (vértice (4.21)), também apresentam convergência para origem.

Além da expansão da região de atração, devido a nova caracterização de  $\mathcal{R}_\mathcal{E}$ , o Teorema 3.2, também é capaz de analisar os sinais exógenos, podendo considerar a minimização dos efeitos e a máxima tolerância da perturbação.

*Minimização dos efeitos da perturbação:* através do Teorema 3.1, procedimento  $\mathcal{J}_2$  pode-se mitigar os efeitos da perturbação na saída regulada do sistema. Considerando

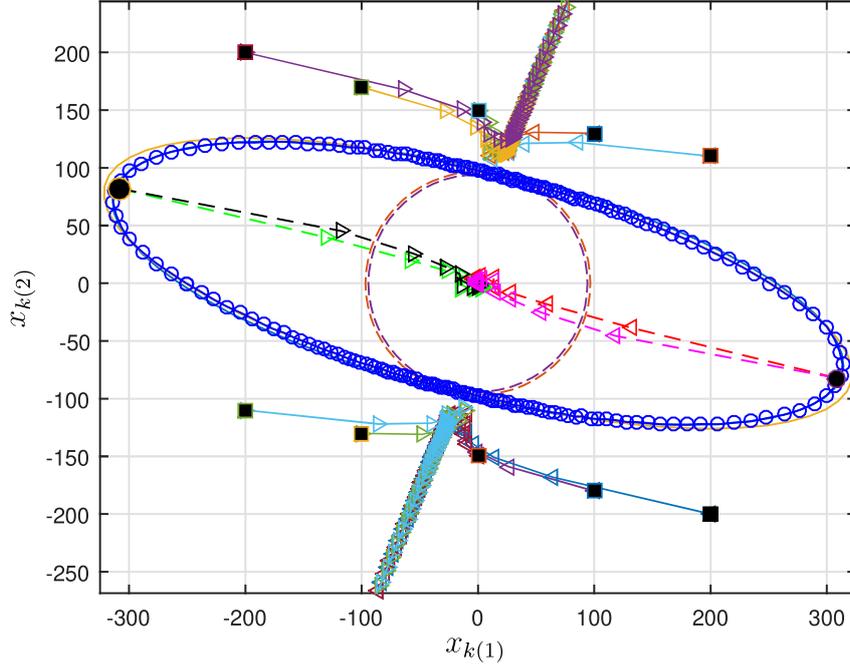


Figura 4.9: Análise dos limites da região de atração e convergência das sequências de condições iniciais, localizadas na borda do elipsoide.

a magnitude da energia de perturbação existente  $\delta^{-1} = 250$ , aplicada ao sistema gerado pelos vértices (4.20) e (4.21), com o atraso  $2 \leq d_k \leq 4$ , a entrada saturante limitada em  $\bar{u} = 10$  e  $\varepsilon = 0.71$ ,  $\gamma$  foi minimizado para o valor de 5.2750. As simulações foram repetidas sob as mesmas condições para  $\alpha_1 \in \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$ , representando-se o sistema em configurações intermediárias em relação aos vértices (4.20) e (4.21).

Partindo-se de uma condição inicial nula fornecida pela sequência  $\varphi_0 = \mathbf{0}$ . Em seguida, o sinal exógeno foi aplicado a partir de  $k = 10$ , sendo limitado por  $\|w\|_2^2 \leq 250$ , construído a partir de  $\|w\|_2^2 \leq \delta^{-1}$ . Para o presente exemplo,

$$w = [\mathbf{0}_{1,9} \quad w_{10} \quad w_{11} \quad w_{12} \quad \mathbf{0}_{13,k}], \quad (4.22)$$

com  $w_{10} = \cos(\theta)\sqrt{250}$ ,  $w_{11} = \sqrt{250 - w_{10}^2 - w_{12}^2}$ ,  $w_{12} = \sin(\theta)\sqrt{250}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

Para os estados iniciais  $\varphi_0$  do sistema (4.20)-(4.21) localizados na origem, a ação do sinal exógeno pode ser observada a partir da Figura 4.10.

Nota-se a convergência dos estados para origem, curvas contínuas em **vermelho** e **azul**, para cada configuração do sistema ao longo das combinações de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Dessa forma, uma vez que os dois vértices do politopo possuem valores próximos, os resultados apresentados possuem similaridade. Logo, para todas as configurações do sistema (4.20)-(4.21), a ação do sinal exógeno, **curva tracejada em verde**, é mitigada a partir da vigésima sétima iteração, dessa forma, a ação de controle em cada configuração, curva em **magenta**, apresenta valores não saturantes.

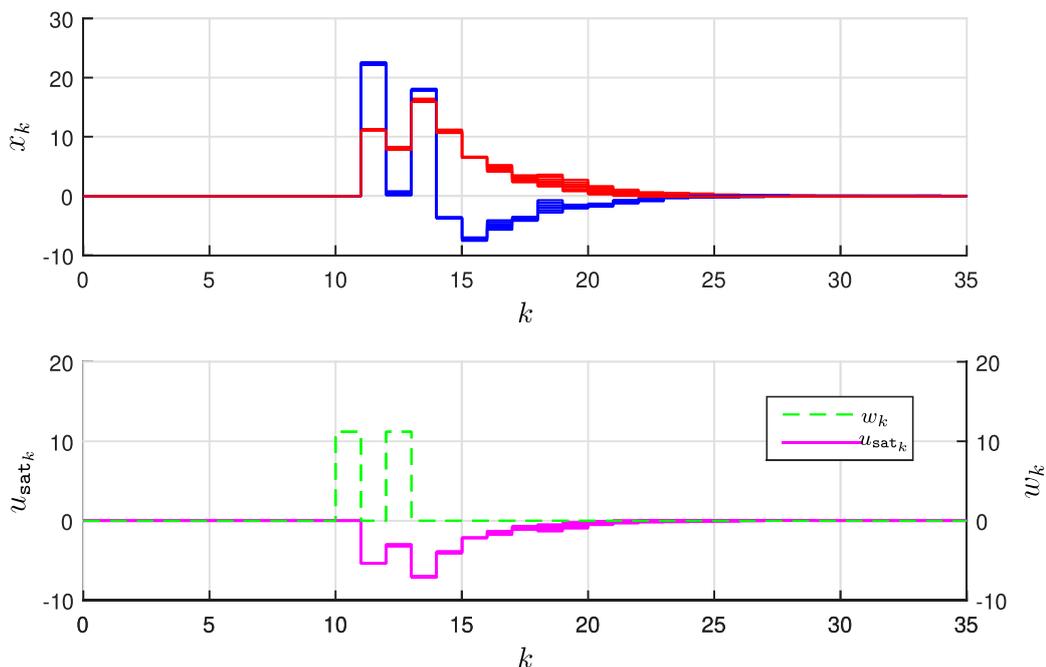


Figura 4.10: Convergência dos estados e ação de controle, sistema sujeito ao sinal exógeno  $w_k$ . Solução obtida a partir do Teorema 3.1 e procedimento  $\mathcal{J}_2$  com  $\varepsilon = 0.71$ .

Sendo as matrizes do funcional de L-K do Teorema 3.1, precisamente conhecidas, o Teorema 3.2, procedimento  $\mathcal{J}_{\alpha_2}$ , pode ser empregado como uma abordagem menos conservadora para sistemas dependentes de parâmetros incertos invariantes no tempo.

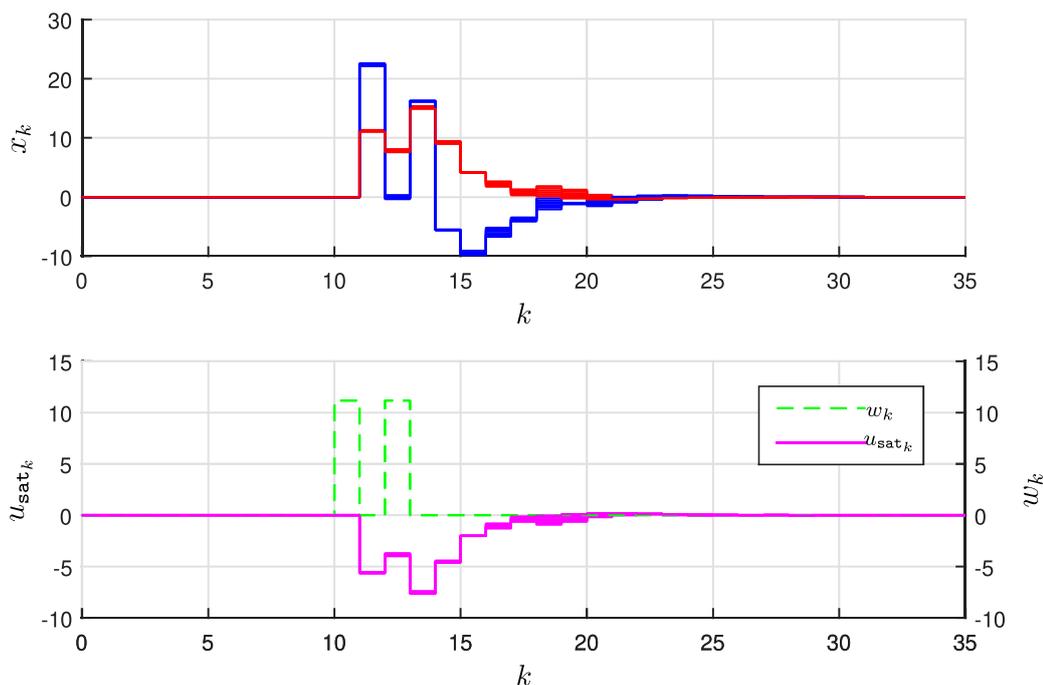


Figura 4.11: Convergência dos estados e ação de controle, para o sistema incerto. Solução obtida a partir do Teorema 3.2 e procedimento  $\mathcal{J}_{\alpha_2}$ .

A partir da Figura 4.11, percebe-se que a convergência dos estados para origem, curvas contínuas em **vermelho** e **azul**, para cada configuração do sistema ao longo das combinações de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , ocorre por volta de  $k = 22$ . Além disso, é possível notar que, as configurações intermediárias do sistema (4.20)-(4.21), apresentaram soluções próximas, fator esperado uma vez que o Teorema 3.2 é menos conservador em relação aos parâmetros incertos invariantes no tempo. Por fim, a ação do sinal exógeno, **curva tracejada em verde**, é mitigada a partir da vigésima segunda iteração.

*Maximização da Tolerância à perturbação:* A partir do Teorema 3.1,  $\mathcal{J}_3$  e Teorema 3.2,  $\mathcal{J}_{\alpha_3}$ , com  $\gamma$  fixo, a minimização de  $\delta$  foi determinada, estabelecendo a máxima energia de perturbação admissível do sistema (4.20)-(4.21). Assim sendo, foi determinada uma  $\mathcal{R}_\varepsilon$  em  $\mathcal{L}_\gamma(\beta)$ , conforme apresentado em (4.6), em que  $V(\bar{x}_k) \leq \|w\|_2^2 + V(\bar{x}_0) \leq \delta^{-1} + \beta^{-1} = \eta^{-1}$ .

A Tabela 4.6 apresenta o comparativo dos resultados obtidos a partir dos Teoremas 3.1 e 3.2.

Tabela 4.6: Minimização  $\gamma$  e  $\delta$  - comparação dos procedimentos  $\mathcal{J}_2$  com  $\mathcal{J}_{\alpha_2}$  e  $\mathcal{J}_3$  com  $\mathcal{J}_{\alpha_3}$  exemplo 2.

Condição	$\delta^{-1}$ fixo	$\gamma$
Teorema 3.1 - $\mathcal{J}_{2\varepsilon=0.71}$	250	5.2750
Teorema 3.2 - $\mathcal{J}_{\alpha_2}$	250	0.8836
Teorema 3.1 - $\mathcal{J}_{2\varepsilon=0.71}$	25	3.4370
Teorema 3.2 - $\mathcal{J}_{\alpha_2}$	25	0.2029
Condição	$\gamma$ fixo	$\delta^{-1}$
Teorema 3.1 - $\mathcal{J}_{3\varepsilon=1}$	8	294.1176
Teorema 3.2 - $\mathcal{J}_{\alpha_3}$	8	400
Teorema 3.1 - $\mathcal{J}_{3\varepsilon=1}$	4	200
Teorema 3.2 - $\mathcal{J}_{\alpha_3}$	4	384.61

Uma análise pertinente consiste em estabelecer uma relação entre as escolhas de  $\gamma$  e  $\delta^{-1}$  ao longo das limitações de energia do controlador. Adotando-se uma variação de energia  $\delta^{-1}$ , entre 5000 e 35714 obteve-se os resultados apresentados na Figura 4.12.

Para o procedimento  $\mathcal{J}_{\alpha_2}$ , ao fixar-se o valor de  $\delta$  nota-se um decaimento de  $\gamma$  ao longo da variação dos limites de saturação, para valores de  $\bar{u}$  elevados  $\gamma$  estabiliza próximo de 2. Dessa forma, quanto maior for  $\bar{u}$ , mais energia o sistema pode empregar para levar os estados do sistema para a origem. Nota-se através da Figura 4.12 que quanto maior for a energia admissível de perturbação, maiores serão os valores mínimos de  $\gamma$ . Tal fator pode ser observado comparando-se a **curva contínua em verde** com a **curva tracejada em vermelho**. Ambos resultados buscam mitigar os efeitos da perturbação na saída regulada porém, para um mesmo limite de saturação, obtém-se valores ótimos menores de  $\gamma$  ao fixar-se valores menores de  $\delta$ .

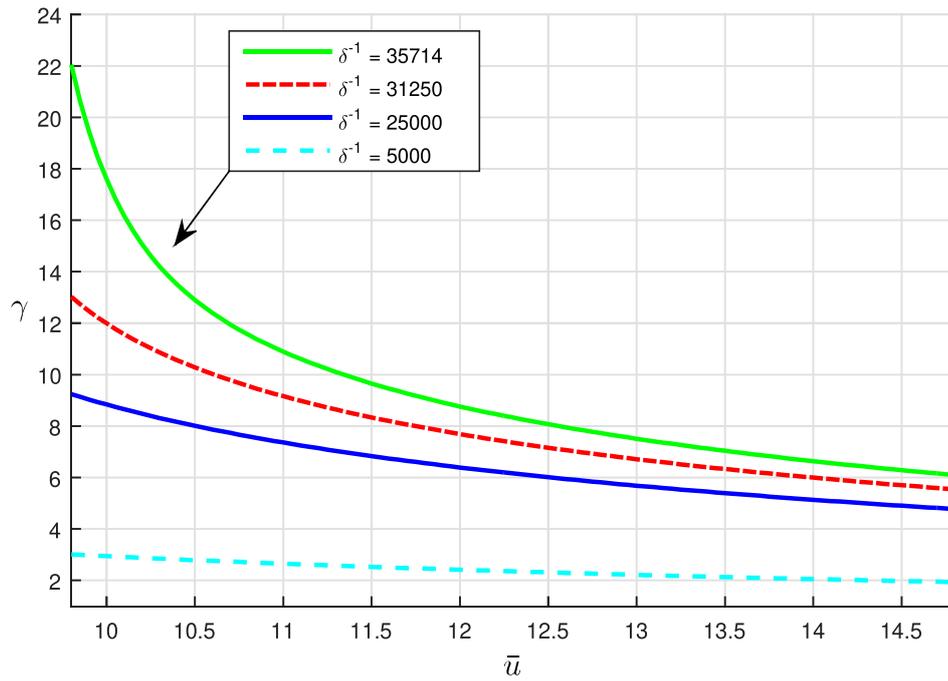


Figura 4.12: Procedimentos de otimização  $\mathcal{J}_{\alpha_3}$  Teorema 3.2, para valores fixos de  $\delta$  ao longo da variação de  $\bar{u}$ .

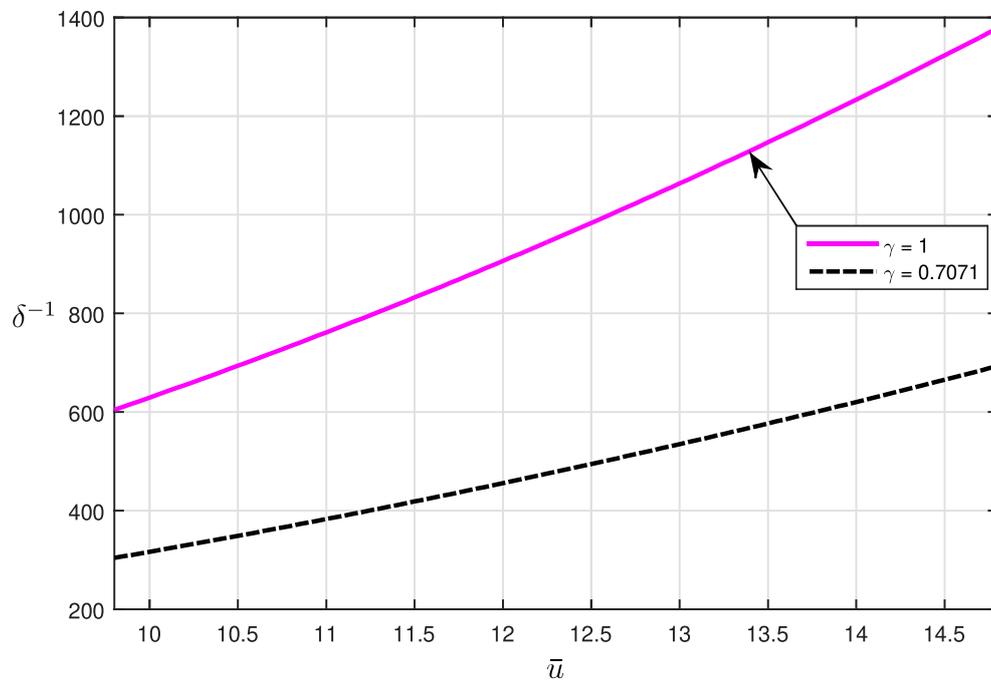


Figura 4.13: Procedimento de otimização  $\mathcal{J}_{\alpha_2}$  Teorema 3.2, para valores fixos de  $\gamma$  ao longo da variação de  $\bar{u}$ .

Observa-se que para do procedimento de otimização  $\mathcal{J}_{\alpha_3}$ , curva tracejada em preto, com  $\gamma = 0.7071$  a energia admissível aumenta, variando de 300 a 719 ao longo de  $9.8 \leq$

$\bar{u} \leq 14.8$ . Observa-se que, para  $\gamma = 1$ , **curva contínua em magenta**, maiores valores de energia,  $660 \leq \delta^{-1} \leq 1380$  são admitidos ao longo da variação de  $\bar{u}$ .

Comparando-se os resultados apresentados nas Figuras 4.12 e 4.13 observa-se que para a variação no limite de saturação há um comportamento inversamente proporcional entre  $\gamma$  e  $\delta$ .

### Aumento das incertezas

Considere o sistema modificado a partir dos vértices (4.20) e (4.21), gerando-se um novo sistema com uma maior variação entre os dois vértices, tal qual

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1.45 & 0.55 \\ 0.31 & 0.85 \end{bmatrix}, A_{d_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.05 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 2.25 \\ 0.45 \end{bmatrix}, \\ B_{w_1} &= \begin{bmatrix} 2.25 \\ 0.45 \end{bmatrix}, C_1 = [1.25 \ 0], D_1 = 1.25. \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ -0.19 & 0.35 \end{bmatrix}, A_{d_2} = \begin{bmatrix} 0 & -0.45 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1.75 \\ -0.05 \end{bmatrix}, \\ B_{w_2} &= \begin{bmatrix} 1.75 \\ -0.05 \end{bmatrix}, C_2 = [0.75 \ 0], D_2 = 0.75. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Com atraso  $\underline{d} = \bar{d} = 5$  e a entrada saturante limitada em  $\bar{u} = 15$ . A Tabela 4.7 apresenta o comparativo dos teoremas desenvolvidos.

Tabela 4.7: Estimativa da  $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$  - *exemplo 2* modificado.

Condição	Projeção do raio da $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$	Volume da $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$
Teorema 3.2 - $\mathcal{J}_{\alpha_1}$	43.2	$3.63 \times 10^{26}$
Teorema 3.1 - $\mathcal{J}_{1\varepsilon=1.1}$	42.01	$2.5 \times 10^{25}$
(Castro <i>et al.</i> , 2020) $_{\varepsilon=1.1}$	41.12	$1.9 \times 10^{25}$

A partir dos resultados obtidos, nota-se que o aumento das incertezas, ou seja, o distanciamento entre dois vértices, reduz a região estimada de atração influenciando diretamente na obtenção de soluções factíveis principalmente para as soluções mais conservadoras da literatura.

## 4.4 Considerações Finais

Neste capítulo foram apresentados os resultados relacionados com a síntese de controladores robustos por realimentação de estados. Inicialmente, a regra de formação geral da candidata à função de L-K foi definida e aplicada para caracterização geométrica da  $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ . Em seguida, foram propostos procedimentos de otimização com objetivo de maximizar a estimativa da região de atração, maximizar a tolerância à perturbação e minimizar o

ganho  $\ell_2$  entre a saída regulada e a entrada de perturbação do sistema. A partir dos exemplos numéricos foram testadas as eficiências das condições desenvolvidas através das aplicações em um exemplo precisamente conhecido e outro dependente de parâmetro. Os resultados obtidos a partir do Teorema 3.2 apresentaram-se menos conservadores comparados aos obtidos com o Teorema 3.1 por não depender de  $\varepsilon$  e por utilizar um candidato a funcional de Lyapunov-Krasovskii com matrizes dependentes dos parâmetros incertos e invariantes no tempo. Dessa forma, foram apresentadas soluções as quais reduziram o conservadorismo mantendo-se a complexidade numérica relativamente baixa, em comparação a vigente literatura.

## Conclusões

### 5.1 Considerações Finais

Neste trabalho, novas condições para a síntese de controladores robustos, por realimentação de estados, aplicada em sistemas discretos no tempo, com atraso nos estados variantes no tempo, incerteza de parâmetros, sujeitos a atuadores saturantes e sinais exógenos foram apresentadas.

No Capítulo 2 foram apresentados trabalhos já presentes na literatura a respeito do tema tratado neste trabalho. Além disso, abordou-se os principais conceitos teóricos e fundamentos matemáticos essenciais para o desenvolvimento e compreensão deste trabalho.

No Capítulo 3 foram desenvolvidas condições para estabilização local de entrada para estado de sistemas discretos no tempo, com atraso nos estados variantes no tempo, sujeitos a atuadores saturantes e a perturbação limitada em energia. Tais abordagens, adequadas à utilização dos procedimentos de otimização convexa, empregam a candidata à função de Lyapunov-Krasovskii, dependente de parâmetros em conjunto a condição de setor generalizada que trata as não linearidades da saturação. Dessa forma, o objetivo geral proposto no Capítulo 1 foi alcançado.

No Capítulo 4 os procedimentos de otimização convexa foram propostos para diferentes objetivos, como a maximização da região de atração, a maximização da energia de perturbação permitida e a minimização do ganho  $\ell_2$ . Dois exemplos numéricos foram considerados para demonstrar a eficácia das abordagens propostas. No primeiro exemplo, apresenta-se um classe de sistema precisamente conhecido, com atraso fixo, dessa forma, foi analisada a convergência das sequências de condições iniciais para o origem. Além disso, demonstrou-se que a dependência da variável escalar  $\varepsilon$  afeta diretamente a factibilidade e as soluções das formulações de síntese propostas. A ação da perturbação foi explorada, relacionando-se a magnitude do sinal exógeno e a máxima energia admissível pelo sistema. Já o segundo exemplo, conferiu uma expansão das investigações para o caso

dependente de parâmetros incertos invariantes no tempo com atraso variante. O Teorema 3.2 apresentou resultados menos conservadores em relação ao Teorema 3.1, uma vez que o método de síntese do mesmo considera incertezas de parâmetros invariantes no tempo na construção do funcional de Lyapunov-Krasovskii. Além disso, ambos teoremas desenvolvidos apresentaram soluções menos conservadoras mantendo-se uma complexidade numérica razoável em relação a vigente literatura. O que atende aos objetivos específicos almejados no Capítulo 1.

## 5.2 Publicações científicas

Durante o desenvolvimento do presente trabalho de dissertação os seguintes trabalhos foram publicados ou aceitos para publicação:

Silva Jr., R.J., Leite, V.J.S., and Silva, L.F.P., “A General Optimization Approach to Enlarge the Region of Attraction of Saturating Discrete-Time Delayed Systems”, em Proceedings of the 15th APCA International Conference on Automatic Control and Soft Computing, 2022, pp 463-473 Lecture Notes electrical Engineering.

Nesse artigo, é abordada uma nova caracterização geométrica de atração, através de um procedimento de otimização convexa para maximização da estimativa da região de atração. Mais especificamente, é desenvolvida uma reescrita do funcional de L-K em uma matriz com vetor de estados aumentados, por meio de uma regra de formação geral. Dessa forma, há uma evolução dos resultados apresentados por Castro *et al.* (2020), em que o conjunto de condições iniciais admissíveis é ampliado mantendo-se as mesmas condições de síntese.

Silva Jr., R.J., Leite, V.J.S., and Silva, L.F.P., “Robust Regional ISS Stabilization of Saturating State-Delayed Discrete-Time Systems”, aceito para publicação no XXIV Congresso Brasileiro de Automática - CBA (2022).

Nesse trabalho são propostas novas condições desenvolvidas de síntese de controladores motivadas pelo trabalho de Castro *et al.* (2020). Especificamente, são tratadas as consequências de sinais exógenos limitados em energia. Além disso, promove um relaxamento das condições considerando a estabilização entrada-estado em conjunto aos procedimentos de otimização convexa. Exemplos numéricos demonstram a eficiência dos métodos propostos, aplicados em um sistema dependente de parâmetros incertos invariantes no tempo.

## 5.3 Trabalhos Futuros

Várias questões podem ser colocadas a partir do desenvolvimento realizado neste trabalho. Algumas propostas de continuidade se destacam por interesse teórico ou prático e são apresentadas em sequência:

1. Investigar a estabilidade entrada-estado para uma classe de sistemas incertos e variantes no tempo, com funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetros  $\alpha_k$  variantes no tempo.
2. Obter a extensão das condições para tratar a realimentação de estados atrasados dependente de parâmetros, isto é, considerar a lei de controle  $u_k = \bar{K}(\alpha_k)\bar{x}_k$ .
3. Obter a extensão das condições para síntese de controladores robustos por realimentação estática de saída  $u_k = K(\alpha_k)y_k$ .
4. Tratar o problema de otimização multiobjetivo, determinando no espaço objetivo factível um subconjunto de soluções próximas da fronteira de Pareto-ótima, relacionando assim os três problemas de otimização convexa propostos.

## Ferramentas Matemáticas

No presente apêndice são apresentadas algumas ferramentas matemáticas utilizadas no desenvolvimento desse trabalho, Capítulo 3: Complemento de Schur, procedimento S e Lema de Finsler.

### A.1 Complemento de Schur

O complemento de Schur é uma ferramenta útil na manipulação de desigualdades matriciais.

**Lema A.1 (Complemento de Schur)** *Suponha que  $R = R^\top$ ,  $S = S^\top$  e  $Q$  são matrizes reais de dimensões apropriadas. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $\begin{bmatrix} S & Q \\ Q^\top & R \end{bmatrix} > \mathbf{0}$
2.  $R > \mathbf{0}$  e  $S - QR^{-1}Q^\top > \mathbf{0}$

A prova completa deste Lema pode ser encontrada em (Tarbouriech *et al.*, 2011, p. 398).

### A.2 Procedimento S

A programação convexa pode apresentar um problema comum, em que a definição em sinal de uma função quadrática deve verificar-se sempre a definição em sinal de outra função quadrática for verificada. Dessa forma, o procedimento S pode ser utilizado para aproximar esta relação através de uma LMI. A seguir é apresentado o Procedimento S para funções quadráticas e inequações estritas.

**Lema A.2 (Procedimento S - Boyd *et al.* (1994, p. 24,44))** *Sejam  $F_0, \dots, F_p$  matrizes simétricas sujeitas à seguinte condição:*

$$\zeta^\top F_0 \zeta > 0, \forall \zeta \neq 0 \text{ tal que } \zeta^\top F_{(i)} \geq 0, i = 1, \dots, p. \quad (\text{A.1})$$

Demonstra-se que, se existem  $\tau_1 \geq 0, \dots, \tau_p \geq 0$  tais que

$$F_0 - \sum_{i=1}^p \tau_i F_i \geq \mathbf{0}, \quad (\text{A.2})$$

então (A.1) é verificada. Além disso, a condição (A.2) é uma LMI nas variáveis  $F_0, \tau_1, \dots, \tau_p$ .

### A.3 Lema de Finsler

O Lema de Finsler é utilizado na demonstração de estabilidade dos controladores robustos, para transformar as funções de energia em LMIs, sendo definido conforme a seguir.

**Lema A.3 (Lema de Finsler Robert *et al.* (1997); de Oliveira & Skelton (2001))** *Considere  $\varphi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{M}(\alpha) = \mathcal{M}(\alpha)^\top \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $\mathcal{G}(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que  $\text{rank}(\mathcal{G}(\alpha)) < \mathbf{0}$ . Então as seguintes condições são equivalentes:*

1.  $\varphi^\top \mathcal{M}(\alpha) \varphi < \mathbf{0}$ ,  $\forall \varphi : \mathcal{G}(\alpha) \varphi = \mathbf{0}$ ,  $\varphi \neq \mathbf{0}$
2.  $(\mathcal{G}(\alpha)^\perp)^\top \mathcal{M}(\alpha) \mathcal{G}(\alpha)^\perp < \mathbf{0}$
3.  $\exists \mu(\alpha) \in \mathbb{R}_+ : \mathcal{M}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha) \mathcal{G}(\alpha) + \mathcal{G}(\alpha)^\top \mathcal{X}(\alpha)^\top < \mathbf{0}$

Assim, a LMI equivalente é dada pela expressão:

$$\psi(\alpha) = \mathcal{M}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha) \mathcal{G}(\alpha) + \mathcal{G}(\alpha)^\top \mathcal{X}(\alpha)^\top < \mathbf{0}. \quad (\text{A.3})$$

# Referências

- Astrom, K. J., & Rundqwist, L. 1989. Integrator windup and how to avoid it. *Pages 1693–1698 of: American Control Conference*. IEEE.
- Binotti, V. 2015. *Estabilidade e estabilização de sistemas de tempo discreto sujeitos a saturação e atraso*. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade de Caxias do Sul RS.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., & Balakrishnan, V. 1994. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics Philadelphia PA.
- Caldeira, A. F., Leite, V. J. S., Miranda, M. F., Castro, M. F. F., & Gonçalves, E. N. 2011. Convex robust  $H_\infty$  control design to discrete-time systems with time-varying delay. *IFAC Proceedings Volumes*, **44**(1), 10150–10155.
- Castro, M. F. F., Seuret, A., Leite, V. J. S., & Silva, L. F. P. 2020. Robust local stabilization of discrete time-varying delayed state systems under saturating actuators. *Automatica*, **122**, 109266.
- Chen, Y., Fei, S., & Zhang, K. 2014. Stabilisation for switched linear systems with time-varying delay and input saturation. *International Journal of Systems Science*, **45**(3), 532–546.
- Chen, Y., Wang, Z., Fei, S., & Han, Q. 2019. Regional stabilization for discrete time-delay systems with actuator saturations via a delay-dependent polytopic approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **64**(3), 1257–1264.
- de Oliveira, M. C., & Skelton, R. E. 2001. Stability tests for constrained linear systems. *Pages 241–257 of: Perspectives in robust control*. Springer.
- de Souza, C., Leite, V. J. S., Silva, L. F. P., & Castelan, E. B. 2019. ISS robust stabilization of state-delayed discrete-time systems with bounded delay variation and saturating actuators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **64**(9), 3913–3919.

- Figueiredo, L. S., Lacerda, M. J., & Leite, V. J. S. 2021. Design of saturating state feedback control laws for discrete-time linear parameter varying systems through homogeneous polynomial parameter-dependent functions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **31**(14), 6585–6601.
- Fridman, E. 2014. *Introduction to Time-Delay Systems*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser.
- Fu, L., & Ma, Y. 2016. Passive control for singular time-delay system with actuator saturation. *Applied Mathematics and Computation*, **289**, 181–193.
- Ghiggi, I. M. F. 2008. *Controle de sistemas com atrasos no tempo na presença de atuadores saturantes*. Ph.D. thesis. M.Phil. thesis, UFRGS.
- Gomes da Silva Jr., J. M., & Leite, V. J. S. 2007. Enciclopédia de automática, controle & automação - Cap. Sistemas lineares com atrasos de tempo. *Editores Blücher*.
- Gomes da Silva Jr., J. M., & Tarbouriech, S. 2005. Antiwindup design with guaranteed regions of stability: an LMI-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **50**(1), 106–111.
- Gomes da Silva Jr., J. M., Paim, C., & Castelan, E. B. 2001. Stability and stabilization of linear discrete-time systems subject to control saturation. *IFAC Proceedings Volumes*, **34**(13), 525–530.
- Gomes da Silva Jr., J. M., Limón, D., Alamo, T., & Camacho, E. F. 2008. Dynamic output feedback for discrete-time systems under amplitude and rate actuator constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **53**(10), 2367–2372.
- Gu, K., Chen, J., & Kharitonov, V. L. 2003. *Stability of time-delay systems*. Springer Science & Business Media.
- Hetel, L., Daafouz, J., & Iung, C. 2008. Equivalence between the Lyapunov-Krasovskii functionals approach for discrete delay systems and that of the stability conditions for switched systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **2**(3), 697–705.
- Hu, H. Y., & Wang, Z. H. 2013. *Dynamics of controlled mechanical systems with delayed feedback*. Springer Science & Business Media.
- Hu, T., & Lin, Z. 2001. *Control systems with actuator saturation: analysis and design*. Springer Science and Business Media.
- Jensen, J. L. W. V. 1906. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta Mathematica*, **30**(1), 175–193.

- Jungers, M., & Castelan, E. B. 2011. Gain-scheduled output control design for a class of discrete-time nonlinear systems with saturating actuators. *Systems and Control Letters*, **60**(3), 169–173.
- Kapila, V., & Haddad, W. M. 1998. Memoryless  $H_\infty$  controllers for discrete-time systems with time delay. *Automatica*, **34**(9), 1141–1144.
- Khalil, H. K. 1996. *Nonlinear systems*. Vol. 115. Patience Hall.
- Kolmanovskii, V., & Myshkis, A. 1992. *State estimates of stochastic systems with delay*. Kluwer Academic Publisher.
- Leite, V. J. S., Castelan, E. B., Silva, L. F. P., & de Souza, C. 2020. *Control Strategy for Time-Delay Systems: Part i: Concepts and Theories*. Academic Press. Chap. 10.
- Lima, T. A., Tarbouriech, S., Gouaisbaut, F., de Almeida Filho, M. P., García, P., Torrico, B. C., & Gonzalez, F. N. 2021. Analysis and experimental application of a dead-time compensator for input saturated processes with output time-varying delays. *IET Control Theory and Applications*, **15**(4), 580–593.
- Lin, J. 2012. Exponential estimates and stabilization of discrete time singular time-delay systems subject to actuator saturation. *Discrete dynamics in nature and society*.
- Lopes, A. N. D. 2017. *Seguimento de referência em controle de sistemas não lineares sob restrições via modelagem Takagi-Sugeno*. M.Phil. thesis, PPGEL, CEFET-MG.
- Lu, L., Lin, Z., & Fang, H. 2009.  $\ell_2$  Gain analysis for a class of switched systems. *Automatica*, **45**(4), 965–972.
- MacDonald, N. 2008. *Biological delay systems: linear stability theory*. Cambridge University Press.
- Miranda, M. F., & Leite, V. J. S. 2011. Robust stabilization of polytopic discrete-time systems with time-varying state delay: A convex approach. *Journal of the Franklin Institute*, **348**(4), 568–588.
- Negi, R., Purwar, S., & Kar, H. 2012. Delay-dependent stability analysis of discrete time delay systems with actuator saturation. *Intelligent control and automation*, **3**(1), 34–43.
- Niculescu, S. I. 2001. *Delay effects on stability: a robust control approach*. Vol. 269. Springer Science & Business Media.

- 
- Pal, V. C., & Negi, R. 2018. Delay-dependent stability criterion for uncertain discrete time systems in presence of actuator saturation. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, **40**(6), 1873–1891.
- Park, P., Ko, J. W., & Jeong, C. 2011. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays. *Automatica*, **47**(1), 235–238.
- Peaucelle, D., Henrion, D., Labit, Y., & Taitz, K. 2002. User’s guide for SEDUMI INTERFACE 1.04. *LAAS-CNRS, Toulouse*.
- Pepe, P., Pola, G., & Di Benedetto, M. 2017. On Lyapunov-Krasovskii characterizations of stability notions for discrete-time systems with uncertain time-varying time delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **63**(6), 1603–1617.
- Robert, TI, Skelton, E, & Grigoriadis, KM. 1997. *A unified algebraic approach to control design*.
- Silva, J. V. V., Silva, L. F. P., Rubio Scola, I., & Leite, V. J. S. 2018a. Robust local stabilization of discrete-time systems with time-varying state delay and saturating actuators. *Mathematical Problems in Engineering*.
- Silva, J.V.V. 2016. *Controle de sistemas discretos no tempo com saturação de atuadores e atraso nos estados*. M.Phil. thesis, PPGEL, CEFET-MG.
- Silva, L. F. P., Leite, V. J. S., Castelan, E. B., & Feng, G. 2018b. Delay dependent local stabilization conditions for time-delay nonlinear discrete-time systems using Takagi-Sugeno models. *International Journal of Control, Automation and Systems*, **16**(3), 1435–1447.
- Silva Jr., R. J., Leite, V. J. S., & Silva, L. F. P. 2022a. A general optimization approach to enlarge the region of attraction of saturating discrete-time delayed systems. *Pages 463–473 of: APCA International Conference on Automatic Control and Soft Computing*. Springer.
- Silva Jr., R. J., Leite, V. J. S., & Silva, L. F. P. 2022b. Robust Regional ISS Stabilization of Saturating State-Delayed Discrete-Time Systems. Congresso Brasileiro de Automática CBA.
- Sontag, E. D. 1989. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **34**(4), 435–443.

- 
- Tarbouriech, S., Garcia, G., Gomes da Silva Jr., J. M., & Queinnec, I. 2011. *Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators*. Springer Science & Business Media.
- Xu, S., Feng, G., Zou, Y., & Huang, J. 2012. Robust controller design of uncertain discrete time-delay systems with input saturation and disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **57**(10), 2604–2609.
- Xu, S., Lam, J., Zhang, B., & Zou, Y. 2014. A new result on the delay-dependent stability of discrete systems with time-varying delays. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **24**(16), 2512–2521.
- Zaccarian, L., & Teel, A. R. 2011. *Modern anti-windup synthesis: control augmentation for actuator saturation*. Vol. 36. Princeton University Press.
- Zhang, X., Zhao, J., & Dimirovski, G. M. 2011.  $\ell_2$ -Gain analysis and control synthesis of uncertain discrete-time switched linear systems with time delay and actuator saturation. *International Journal of Control*, **84**(10), 1746–1758.
- Zheng, Q., & Wu, F. 2008. Output feedback control of saturated discrete-time linear systems using parameter-dependent Lyapunov functions. *Systems and Control Letters*, **57**(11), 896–903.