



Universidade Federal
de São João del-Rei

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Associação Ampla entre CEFET-MG e UFSJ

Operador Integral no Domínio do Tempo para uma Antena tipo “offset”

Hélder Gasparino Mattos Filho

2022

Operador Integral no Domínio do Tempo para uma Antena tipo “offset”

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, parceria ampla entre o CEFET-MG e UFSJ como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Sistema Elétricos

Linha de Pesquisa: Eletromagnetismo Aplicado

Orientador: Prof. Dr. Sandro Mordente Trindade Gonçalves

Coorientador: Prof. Dr. Cássio Gonçalves do Rêgo



Belo Horizonte

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET – MG

2022

M444o Mattos Filho, Hélder Gasparino
Operador integral no domínio do tempo para uma antena tipo “offset” /
Hélder Gasparino Mattos Filho. – 2022.
50 f.: il., gráfs

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica em associação ampla entre a UFSJ e o CEFET-MG.

Orientador: Sandro Mordente Trindade Gonçalves.

Coorientador: Cássio Gonçalves do Rêgo.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de
Minas Gerais.

1. Antenas refletoras – Teses. 2. Sistemas de comunicação em banda larga
– Teses. 3. Processamento de dados ópticos – Métodos – Teses. 4. Óptica
geométrica – Teses. 5. Análise no domínio do tempo – Teses. I. Gonçalves,
Sandro Mordente Trindade. II. Rêgo, Cássio Gonçalves do. III. Centro Federal
de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Universidade Federal de São
João del-Rei. V. Título.

CDD 621.3841

Agradecimentos

Agradeço ao meu pai Hélder, minha mãe Rita e meu irmão Henrique por todo o suporte, carinho e atenção desde sempre comigo, que foram essenciais para cursar e concluir o mestrado.

Agradeço a todos os professores do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. Em especial o professor Sandro Trindade Mordente Gonçalves pelos incentivos e confiança em mim.

Agradeço ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais e à Universidade Federal de São João del-Rei e toda sua comunidade, por proporcionarem uma estrutura de qualidade para o meu aprendizado.

Resumo

Neste trabalho, uma formulação assintótica foi desenvolvida para a determinação da resposta de uma antena com refletor parabólico “offset” iluminada por alimentador tipo cosseno elevado e dependência temporal na forma de um degrau unitário. A análise temporal para configurações “offset” tem sido pouco investigada na literatura. A abordagem aqui utilizada foi desenvolvida através da aplicação do Método da Abertura e da Ótica Geométrica, e as expressões analíticas aqui obtidas são inéditas na literatura científica. Devido à complexidade das integrais de radiação no domínio do tempo, foi utilizado o *software* comercial Mathematica™ juntamente com o pacote de integração RUBI (Ruled Based Integration). Os resultados das integrações foram tratados e reescritos em formas mais aplicáveis, e a resposta ao degrau unitário, genérica para valores inteiros e positivos de N , parâmetro do modelo alimentador diretamente associado à diretividade da antena foi obtida em um operador integral, válido tanto para regiões de campo próximo quanto para campo distante, e que pode ser utilizado para o cálculo da resposta da antena a fontes com comportamento temporal realístico.

Palavras chaves — Método de Abertura, Geometria Óptica, Antenas de Radiação de Impulso, Antenas Deslocadas, Resposta no Domínio do Tempo.

Abstract

In this work, an asymptotic formulation was developed to experiment the response of an antenna with an offset parabolic reflector illuminated by a high cosine feeder and time dependence in the form of a unitary step. Temporal analysis for “offset” configurations has been little investigated in the literature. The approach used here was developed through the application of the Aperture Method and Geometric Optics, and the analytical expressions transmitted here are unprecedented in the scientific literature. Due to the complexity of radiation integrals in the time domain, the commercial software Mathematica™ was used together with the integration package RUBI (Ruled Based Integration). The results of the integrations were treated and rewritten in more perfect forms, and the response to the unitary step, for any positive and integer N , a parameter of the fed model directly associated with the directivity of the antenna, was met in an integral operator, valid both for the regions of near field and far field, and which can be used to study the antenna response to sources with realistic temporal behavior.

Index Terms— Aperture Method, Geometric Optics, Impulse Radiating Antennas, *Offset* Antennas, Time Domain Response.

Lista de Imagens

Figura 2.1 – Regiões de Campo da Antena.....	13
Figura 2.2 - Raios Refletidos por uma Superfície Parabólica alimentada pelo foco..	14
Figura 2.4 – Geometria do Refletor <i>Offset</i>	15
Figura 2.5 – Sistema de Coordenadas para um Refletor <i>Offset</i> .	16
Figura 2.6 – Abertura de um refletor parabólico.....	17
Figura 3.1 – Relação ente o operador integral e uma fonte temporal.	19
Figura 3.2 – Frente de onda Incidente no ponto Q e refletida em P.....	23
Figura 3.3 - Frente de onda Incidente no ponto Q e refletida em P, relação entre R_0 e γ	24
Figura 3.4 – Relação entre α e ξ .	25
Figura 3.5 – Frente de Onda Incidente no ponto Q.....	29
Figura 3.6 – Limites para integração em ξ quando $\xi = \xi'$, sendo $\xi_1 < \xi = \xi'$ e $\rho > D_2$.	31
Figura 3.7 - Limites para integração em ξ quando $\xi = \xi'$, sendo $\xi_1 < \xi = \xi'$ e $\rho < D_2$.	31
Figura 3.8 - Limites para integração em α	33
Figura 4.1 – Operador Integral no TD para $r = 50m$, e diferentes valores de θ	43
Figura 4.2 – Operador Integral no TD para $r = 50m$, e diferentes valores de n .	44
Figura 4.3 - Operador Integral no TD para $r = 5000m$, e diferentes valores de θ	45
Figura 4.4 - Operador Integral no TD para $r = 5000m$, e diferentes valores de n .	46

Sumário

1	INTRODUÇÃO.....	9
1.1	<i>Justificativa e Objetivo</i>	<i>10</i>
1.2	<i>Resultados e Publicação.....</i>	<i>11</i>
1.3	<i>Organização</i>	<i>12</i>
2	CONCEITOS PRELIMINARES.....	12
2.1	<i>Regiões de Campo.....</i>	<i>12</i>
2.2	<i>Geometria de uma antena parabólica e configuração Offset.....</i>	<i>13</i>
2.3	<i>Método da Abertura.....</i>	<i>17</i>
2.4	<i>Ótica Geométrica</i>	<i>18</i>
2.5	<i>Alimentador Cosseno Elevado Modificado.....</i>	<i>18</i>
3	METODOLOGIA.....	19
3.1	<i>Operador Integral.....</i>	<i>19</i>
3.1.1	<i>Domínio da Frequência.....</i>	<i>20</i>
3.1.2	<i>Domínio do Tempo</i>	<i>28</i>
3.1.3	<i>Limites de Integração no Tempo</i>	<i>30</i>
3.2	<i>Equações do Operador Integral com n inteiro e positivo</i>	<i>34</i>
3.2.1	<i>Função Hipergeométrica Appell</i>	<i>39</i>
4	RESULTADOS.....	42
4.1	<i>Análise do Operador Integral na Região de Fresnel.....</i>	<i>42</i>
4.2	<i>Análise do Operador Integral na Região de Fraunhofer.....</i>	<i>44</i>
5	CONCLUSÕES	47
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	49

1 INTRODUÇÃO

As antenas são instrumentos essenciais em telecomunicações, sendo um dos pilares da tecnologia no mundo globalizado. Tal instrumento possibilita que informações, dos mais variados tipos, sejam transmitidas e recebidas, de forma rápida, clara e robusta, permitindo ainda, aplicações em longas distâncias sem a utilização de fios.

No planejamento de redes de telecomunicação, as antenas refletoras parabólicas são largamente utilizadas por apresentarem alta diretividade e operar em frequências elevadas com banda larga. Esse tipo de antena consegue atender aplicações que necessitam de transmissão de alta quantidade de dados por milhares de quilômetros. Percebeu-se então a necessidade do estudo de tais instrumentos, que por fim, modificaram a forma com que as informações são transmitidas no mundo.

As antenas refletoras são majoritariamente analisadas no domínio da frequência, quando era assumido que os campos eletromagnéticos tinham uma frequência portadora com estreita banda e que não havia fenômenos transitórios. No entanto, diversas aplicações que surgiram ao longo do tempo, pela necessidade cada vez maior da quantidade de dados transmitidos, não se comportam dessa maneira. Por exemplo, aplicações em altas frequências começam a ter transitórios, operando com pulsos ultracurtos que geram extensas larguras de banda, inviabilizando uma análise tradicional no domínio da frequência, que tem foco em somente uma frequência ou em faixas pequenas. Surge então a necessidade da análise temporal. H. Chou [1], no seu trabalho de 1997, realizou uma análise dos campos radiados por antenas refletoras parabólicas condutoras perfeitas, ou seja, com refletor simétrico, e alimentados pelo foco. Foi apresentada uma abordagem com expressões no domínio do tempo para o campo radiado da resposta ao degrau. Tal resposta foi obtida a partir de expressões no domínio da frequência, utilizando as aproximações da Ótica Geométrica (GO) e do método da abertura, utilizando de um alimentador de Huygen, e que gerou expressões válidas para o campo próximo e distante.

Estudos posteriores, como em [2] e [3], ampliam os conceitos abordados e apresentam uma formulação fechada no domínio do tempo, válida para região de campo próxima e distante, para a resposta ao degrau de uma antena de refletor parabólico alimentada no foco, a partir de uma alimentação do tipo cosseno elevado. Tal estudo utiliza da transformada inversa de Laplace para converter as expressões encontradas para a resposta ao impulso, ou seja, no domínio da frequência, que foram encontradas utilizando as mesmas técnicas em [1]. Em [3], é desenvolvida uma formulação fechada para antenas parabólicas alimentadas pelo foco, que pode ser utilizada para diversas aplicações que envolvam tal configuração. A generalidade de

tal formulação, permitiu a autora realizar simulação em diferentes diretividades, e em seguida, utilizar-se da resposta ao degrau unitário para obter uma resposta para a fonte tipo cosseno elevado com dependência temporal 4-PSK, uma modulação de sinais bastante difundida e utilizadas em antenas refletoras.

Recentemente, foram realizados estudos para o mecanismo de difração dos campos transientes para grandes refletores no domínio do tempo, como em [8] e [9]. Em [8], Chou utiliza dos conceitos do seu artigo original, [1], para elaborar e explicar, a partir da física Óptica (PO), uma superfície/contorno contribuinte para o cálculo do campo radiado, encontrada a partir da interseção da superfície do elipsoide que determina a radiação do campo incidente e a superfície do espalhador.

1.1 Justificativa e Objetivo

Os estudos sobre antenas refletoras são amplos, explorando os domínios da frequência e do tempo, e trazendo formulações que são utilizadas nas mais diversas aplicações. No entanto, tais trabalhos utilizam em sua maioria a configuração de alimentação no foco da antena, e é sabido que essa não é o único tipo de configuração para antenas refletoras. Outros tipos de alimentação aparecem em aplicações que buscam resolver problemas específicos, ou mitigar deficiências da geometria mais difundida. É o caso da geometria *offset*, que em suma, desloca num eixo vertical o alimentador, mas mantendo-o no foco do refletor, alterando seu posicionamento angular, e com isso, evitando efeitos de bloqueio ou sombreamento.

A geometria *offset* não é tão explorada na literatura como a antena alimentada pelo seu eixo, no entanto, estudos promissores são encontrados. Em [6], foi feita uma análise espectral do comportamento do campo na abertura de antenas com essa geometria, no entanto, limita-se a uma análise na frequência. Entendendo da importância da análise de antenas *offset*, o trabalho feito em [11] ampliou os estudos da geometria para análises no domínio do tempo, apresentando uma análise temporal fechada dos campos radiados por uma antena refletora IRA *offset* e sua resposta ao degrau unitário, porém, as equações encontradas só podem ser utilizadas para uma diretividade específica, limitando o estudo a aplicações que exigem tal valor.

Vê-se então a necessidade de investigar antenas do tipo *offset* afim de enriquecer a literatura acerca dessa configuração e melhorar as ferramentas de análise temporal que foram encontradas. Este trabalho dá continuidade à análise temporal de uma antena *offset* proposto em [11], expandindo e generalizando a análise temporal para o alimentador cosseno elevado modificado, que com a uma nova formulação, permite que uma gama de diretividades possam

ser exploradas. A análise apresentada é baseada nos trabalhos [3] e [11], e tem como objetivo formular um operador integral, ferramenta utilizada na análise dos campos radiados. A formulação, ao passar por uma transformada inversa de Laplace, se torna representada no domínio do tempo, permitindo diversas análises da tal geometria. Uma das grandes vantagens do cálculo de campo radiado por meio do operador integral é a flexibilidade que esta técnica proporciona. A fonte responsável por gerar o sinal a ser transmitido pela antena é tratada de forma independente com relação ao operador integral, evitando que cálculos sejam refeitos sempre que uma nova fonte for introduzida ao sistema.

1.2 Resultados e Publicação

A formulação desenvolvida nesse trabalho foi utilizada para avaliar o impacto da variação do ângulo de elevação do observador nas regiões de campo próximo e distante. Tais resultados estão no artigo abaixo, aceito e publicado nos anais do CEFC 2022.

BORGES, MARIA LORENA GOMEZJURADO; FILHO, HELDER GASPARINO MATTOS; DO REGO, CASSIO GONCALVES; GONCALVES, SANDRO TRINDADE MORDENTE; RESENDE, URSULA DO CARMO. **Time Domain Integral Operator for an Offset Impulse Radiating Antenna**. 2022 IEEE 20th Biennial Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC), 2022.

Utilizando mais uma vez da formulação desenvolvida, foi escrito outro artigo para avaliar diferentes valores positivos e inteiros de N , parâmetro ligado a diretividade da antena. Tal artigo foi submetido, aceito, apresentado e publicado nos anais do 20º Simpósio Brasileiro de Micro-ondas e Optoeletrônica.

BORGES, MARIA LORENA GOMEZJURADO; FILHO, HELDER GASPARINO MATTOS; DO REGO, CASSIO GONCALVES; GONCALVES, SANDRO TRINDADE MORDENTE. **Operador Integral No Domínio Do Tempo Para Antenas IRA Tipo Offset**. 20º Simpósio Brasileiro de Micro-ondas e Optoeletrônica (SBMO), 2022.

1.3 Organização

O trabalho foi dividido da seguinte forma. No Capítulo 2 os conceitos preliminares que baseiam a metodologia para que a formulação temporal seja encontrada, temas como os parâmetros de uma antena *offset*, o método da abertura e a Óptica geométrica são discutidos. No Capítulo 3 explicitam-se os procedimentos para encontrar as expressões do operador integral, partindo do domínio da frequência até as expressões finais no domínio do tempo, e tais expressões são apresentadas em sua forma completa. No Capítulo 4 faz-se uso da formulação apresentada para realizar simulações alterando o expoente da formulação do alimentador em regiões de campo próximo e distante, a fim de observar o funcionamento da formulação, bem como são discutidos os resultados obtidos. Conclusões sobre a formulação e da geometria *offset* estão no Capítulo 5.

2 CONCEITOS PRELIMINARES

Neste Capítulo serão apresentados os conceitos nos quais a metodologia para análise temporal da geometria *offset* se baseia. Discussões sobre a própria geometria, seus parâmetros únicos e comuns às antenas refletoras com alimentação no foco, bem como as técnicas utilizadas na análise do campo espalhado, como a Ótica Geométrica e o Método da Abertura.

2.1 Regiões de Campo

O espaço ao redor de uma antena é dividido em três partes: campo próximo reativo, campo próximo radiante, também conhecido como região de Fresnel, e campo distante, conhecido como região de Fraunhofer [10], como mostrado na Figura 2.1. Tal definição pode ser aplicada quando é fixado um comprimento de onda λ para a definição dos campos radiados de uma antena.

A região de campo próximo reativo é definida como a área ao redor da antena onde os campos elétrico e magnético das ondas refletidas não são ortogonais entre si. É considerada região de campo reativo pontos que distam até $0,62\sqrt{(D^3/\lambda)}$ da antena, sendo D a maior dimensão da antena e λ o comprimento de onda de uma portadora senoidal de referência [10]. A região de campo próximo radiante fica localizada entre $0,62\sqrt{(D^3/\lambda)}$ e $2D^2/\lambda$ de distância da antena. Por último, existe a região de campo distante, definida quando a distribuição angular de campo não depende da distância da antena e os campos elétrico e magnético são ortogonais entre si, e ocorre em distâncias maiores que $2D^2/\lambda$.

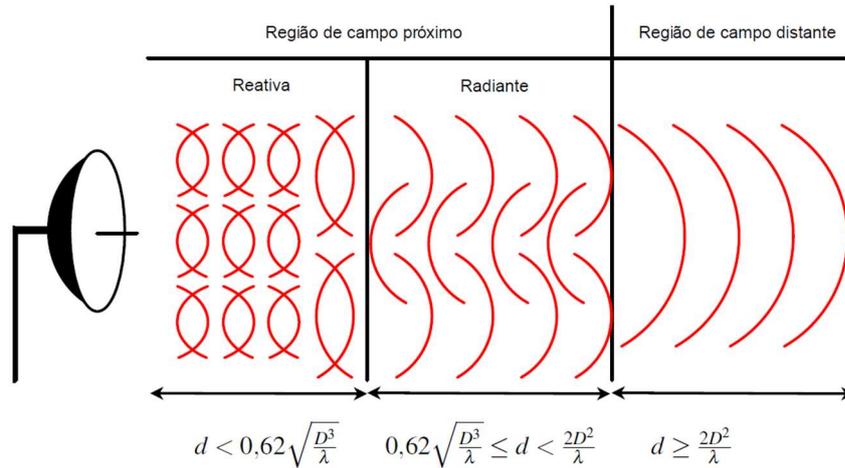


Figura 2.1 – Regiões de Campo da Antena.

Fonte: Figura modificada (FARIA,2017)

2.2 Geometria de uma antena parabólica e configuração *Offset*

As antenas refletoras parabólicas vêm sendo utilizadas desde o meio do século XX, onde aplicações de radar para fins bélicos começaram a ser explorados com mais afinco. Desde então, seu uso em micro-ondas, comunicação, rastreamento por satélite, dentre outros só tem aumentado, tornando o avanço tecnológico constante para desenvolver soluções que moldem as superfícies refletoras e otimizem a iluminação sobre as aberturas maximizando o ganho [10].

O princípio de funcionamento deste tipo de antena é baseado na colimação de raios. Tais refletores colimam o feixe radiado pelo alimentador, e a superfície parabólica é obtida pela rotação de uma parábola sob seu próprio eixo, e geralmente, no foco da parabolóide é colocado o alimentador [3]. A configuração das antenas refletoras parabólicas com alimentação no foco é chamada de “*front-feed*”, mostrada na Figura 2.2.

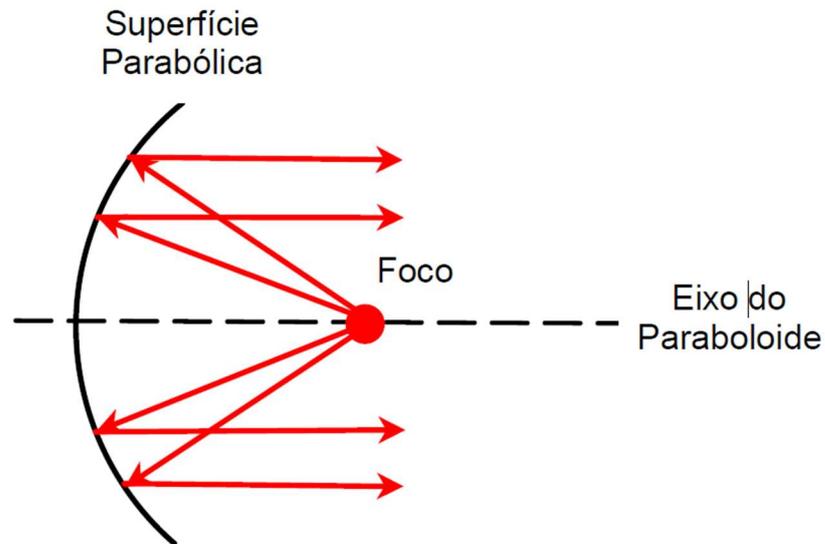


Figura 2.2 - Raios Refletidos por uma Superfície Parabólica alimentada pelo foco.

Fonte: (FARIA,2017)

A configuração “*front-feed*” é característica do refletor parabólico, e foi amplamente utilizada ao longo do tempo. No entanto, essa alimentação simétrica causa o bloqueio da abertura, gerando diversos problemas, como a queda na eficiência, aumento dos lóbulos secundários na radiação e perdas consideráveis por transbordamento, ocorrendo principalmente em caso que a relação entre o foco e o diâmetro do refletor é baixa (11). A configuração “*offset*” é utilizada para evitar esses problemas. Ao mover o alimentador no eixo vertical, o mesmo deixa de estar no centro da abertura da antena, e ganha um deslocamento angular que permite ainda sim, estar no foco do refletor.

O refletor “*offset*” contém parâmetros singulares apresentados na Figura 2.3. O ângulo de *offset* θ_0 corresponde a inclinação do alimentador, já x'_0 é a distância do alimentador em relação ao centro da abertura da antena. São apresentados também parâmetros comuns em antenas refletoras, como F , a distância focal e D , o diâmetro do refletor.

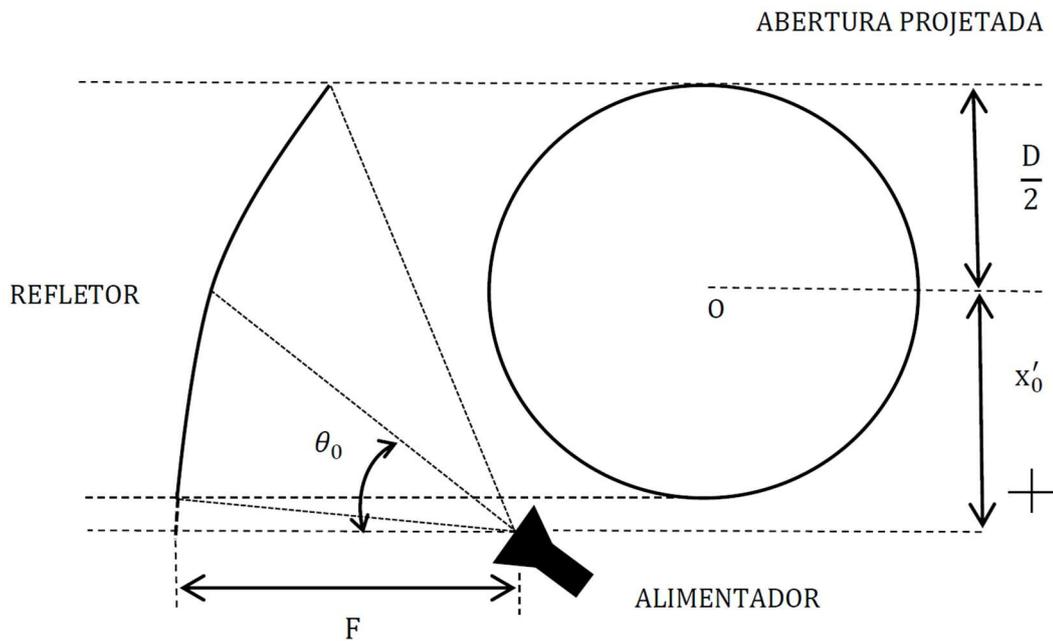


Figura 2.3 – Geometria do Refletor *Offset*.

Fonte: (GOMEZJURADO,2021)

A Figura 2.4 apresenta o sistema de coordenadas para um refletor *offset*, em que pode ser observado que existem dois sistemas de coordenadas, o sistema (x' , y' e z') e o sistema de coordenadas do alimentador (x_F , y_F e z_F) ambos com origem iguais, mas que representam, respectivamente, foco do refletor e o centro de fase do alimentador. A necessidade de vários sistemas de coordenadas se dá justamente pela assimetria, que torna o equacionamento consideravelmente mais complexo, mas permite uma análise detalhada da geometria.

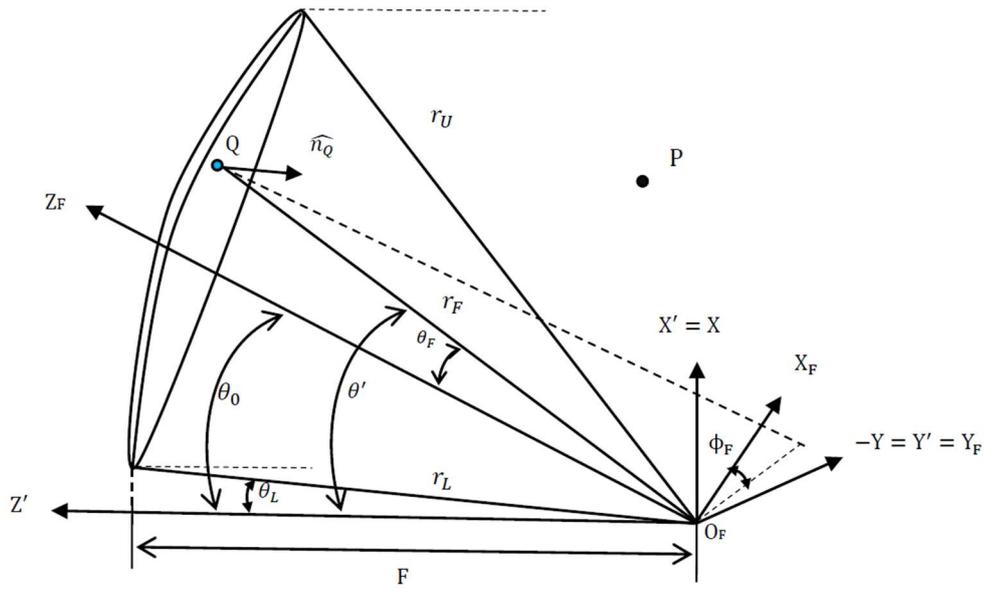


Figura 2.4 – Sistema de Coordenadas para um Refletor *Offset*
 Fonte: (GOMEZJURADO,2021)

A partir dos sistemas de coordenadas, é possível traçar correlações entre os ângulos que estão presentes no mesmo com as dimensões do refletor.

Por se tratar de uma superfície parabólica, o refletor deve cumprir a equação que define a mesma. Essa é expressa em (2.1)

$$r_F = \frac{2F}{1 + \cos \theta'} \quad (2.1)$$

Um parâmetro importante do refletor, como uma superfície, é sua normal unitária, dada por (2.2) e apresentada na Figura 2.5.

$$\hat{\mathbf{n}}_Q = \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) \hat{\mathbf{r}}' + \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right) \hat{\boldsymbol{\theta}}' \quad (2.2)$$

O diâmetro do refletor (D) pode ser calculado como apresentado em (2.3)

$$D = \frac{4F \sin \theta'}{(\cos \theta' + \cos \theta_0)} \quad (2.3)$$

A distância x'_0 pode ser calculado como mostrado em (2.4)

$$x'_0 = \frac{2F \sin \theta_0}{(\cos \theta' + \cos \theta_0)} \quad (2.4)$$

O ângulo de “*offset*”, ou ângulo do alimentador pode ser determinado por (2.5)

$$\theta_0 = 2 \tan^{-1} \left(\frac{x'_0}{2F} \right) \quad (2.5)$$

2.3 Método da Abertura

Em antenas parabólicas dos mais variados tamanhos, a distribuição espacial dos campos radiados pela mesma é definida pela forma e dimensão de sua abertura, pois, os campos eletromagnéticos dessas antenas podem ser representados como integrais calculadas a partir dos campos de abertura [5] [13].

No Método da Abertura, o campo refletido pelo paraboloide é determinado ao longo de um plano normal ao eixo do refletor. Tal plano é conhecido como plano de abertura, mostrado na Figura 2.5, e assim, fontes equivalentes de corrente são formadas nesse plano, e são utilizadas para determinar os campos radiados pela antena, por meio da integral de radiação na superfície da abertura [1] [3].

A distribuição tangencial do campo elétrico dentro do plano de abertura do refletor é obtida assumindo que o campo incidente do alimentador é refletido neste plano [3].

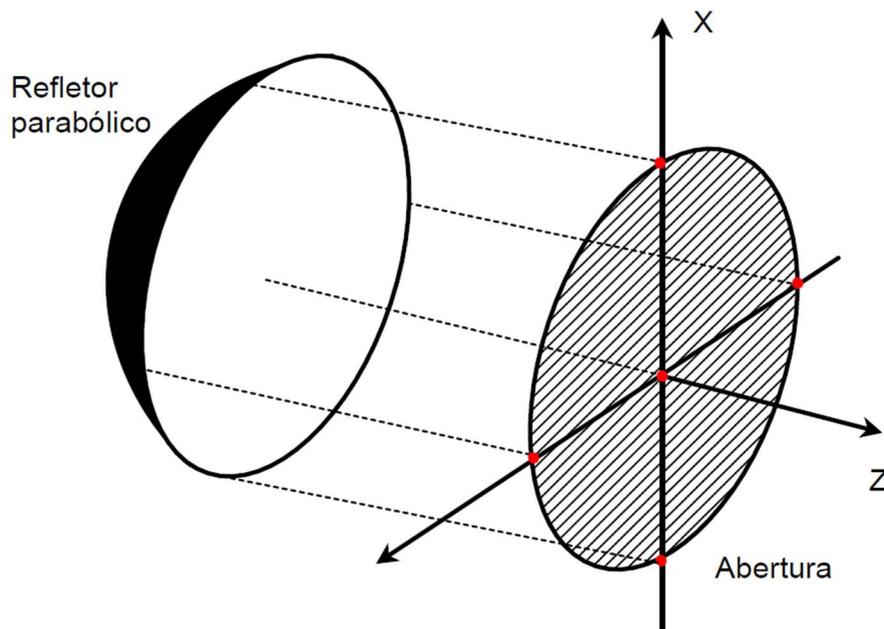


Figura 2.5 – Abertura de um refletor parabólico

Fonte: (FARIA,2017)

As fontes equivalentes de corrente que são formadas na região da abertura são advindas da fonte real do alimentador. Essa troca é feita considerando o Princípio da Equivalência, e pode ser utilizada pois os campos radiados pelo alimentador e que serão refletidos pelo refletor parabólico tem um traçado bem definido pela Óptica Geométrica.

2.4 Ótica Geométrica

A Ótica Geométrica é a técnica que rastreia os traços de raios para encontrar o caminho pelo qual devem percorrer. Quando aplicada no estudo das antenas, o método permite a determinação das trajetórias seguidas pelos raios que partem do alimentador e refletem na superfície do paraboloide [3]. Por meio dessa técnica demonstra-se que um feixe de raios paralelos incidente em um refletor parabólico perfeitamente condutor irá produzir uma radiação que converge para o foco.

A análise feita nesse trabalho, bem como nos que servem de base para esse, [3] e [11], não leva em conta efeitos de difração na borda do refletor, já que, tal efeito ocorre em ângulos de iluminação elevados, fato esse que não ocorre em nenhum dos trabalhos.

2.5 Alimentador Cosseno Elevado Modificado

A fim de desenvolver uma formulação analítica para a antena *offset*, será utilizado neste trabalho, assim como nos que o baseiam, o alimentador Cosseno Elevado Modificado. Esse alimentador tem expressão mostrada em (2.6).

$$f(\theta_F) = \cos^n \left(\frac{\theta_F}{2} \right), \quad (2.6)$$

na qual o ângulo θ_F , apresentado na Figura 2.5, indica a região de iluminação fornecida pelo alimentador e o expoente n controla a diretividade do alimentador, ou seja, quanto maior o expoente n , maior será a diretividade do alimentador e conseqüentemente da antena em que for empregada [3].

3 METODOLOGIA

A análise de antenas refletoras parabólicas é feita, em geral, no domínio da frequência e os efeitos transitórios de tais estruturas é obtido pela transformada de Fourier aplicada nas equações de radiação. Sabe-se, contudo, que este estudo se torna **menos complicado** quando realizado diretamente no domínio do tempo [6].

Com os conceitos preliminares definidos, é possível formular o operador integral, que age como uma função de transferência e é tido como um passo intermediário para o cálculo do campo radiado [3]. Para tal, as expressões analíticas são trabalhadas, a princípio, no domínio da frequência, obtidas pela análise feita pela Óptica geométrica aplicada no método da abertura [1]. Aplicando a transformada inversa de Laplace nas equações espectrais, ajustando os limites de integração para o domínio do tempo e resolvendo as integrais, são encontradas as equações do Operador Integral no domínio do tempo.

3.1 Operador Integral

Nos estudos de antenas refletoras parabólicas no domínio do tempo, o ponto chave destes é desenvolvimento de um operador integral, também conhecido como função de transferência, que atua como função peso no cálculo do campo radiado pela antena, como ilustrado na Figura 3.1.

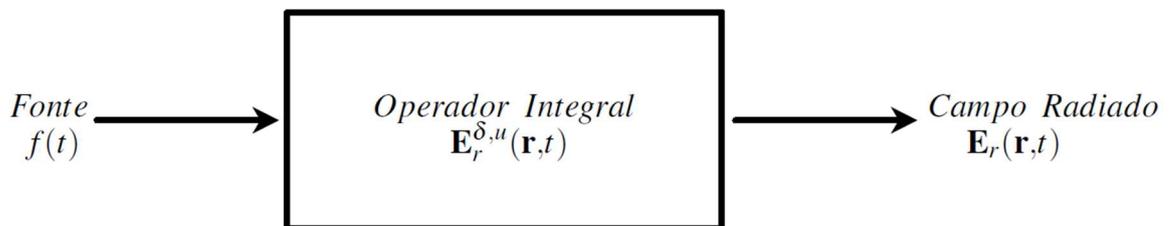


Figura 3.1 – Relação entre o operador integral e uma fonte temporal

Fonte: (FARIA,2017)

Com a expressão do operador integral definida, é possível determinar o campo radiado pela antena a partir da convolução entre o operador e o sinal da fonte. A duração da função de transferência é proporcional à área de superfície do refletor e seu valor decresce com o aumento da distância entre o refletor e o observador, pela razão de $1/r$ [6].

3.1.1 Domínio da Frequência

A análise no domínio da frequência requer rastrear o campo eletromagnético desde o alimentador, a partir da Ótica Geométrica, que será refletido na superfície parabólica, podendo ser calculado pelo método da abertura e o princípio da equivalência.

Partindo da equação de uma onda Transversal Eletromagnética (TEM) [10], considerando-a o campo incidente E_i mostrado em (3.1).

$$E_i = \frac{1}{r_F} [A_\theta(\theta_F, \phi_F) \hat{\theta}_F + A_\phi(\theta_F, \phi_F) \hat{\phi}_F] e^{-jk r_F}, \quad (3.1)$$

e convertendo a mesma para o sistema auxiliar de coordenadas (x' , y' e z'), detalhada na Figura 2.4, dado as relações [10] em (3.2) e (3.3):

$$\hat{\theta}_F = \cos \theta_F (\sin \phi \hat{y}_F + \cos \phi \hat{x}_F) - \sin \theta_F \hat{z}_F, \quad (3.2)$$

$$\hat{\phi}_F = -\sin \phi \hat{x}_F + \cos \phi \hat{y}_F, \quad (3.3)$$

onde,

$$\hat{y}_F = \hat{y}', \quad (3.4)$$

$$\hat{z}_F = \sin \theta_0 \hat{x}' + \cos \theta_0 \hat{z}', \quad (3.5)$$

$$\hat{x}_F = -\sin \theta_0 \hat{x}' + \cos \theta_0 \hat{z}', \quad (3.6)$$

$$\hat{\theta}' = \cos \theta' (\sin \theta' \hat{y}' + \cos \phi' \hat{x}') - \sin \theta' \hat{z}'. \quad (3.7)$$

Na reflexão sobre um condutor elétrico perfeito, a componente tangencial do campo elétrico é nula, de acordo com o traçado de raios pelo Ótica Geométrica, e a expressão para o campo refletido E_r em tal superfície é dado por

$$E_r = 2(E_i \cdot \hat{n}_Q) \hat{n}_Q - E_i. \quad (3.8)$$

Assim, a expressão para o campo refletido pela superfície do refletor é dada por (3.9).

$$E_r = \frac{1}{\Delta} \frac{e^{-jk r_F}}{r_F} \{ [A_\theta(\theta_F, \phi_F)] (C_1 \hat{x}' - S_1 \hat{y}') + [A_\phi(\theta_F, \phi_F)] (S_1 \hat{x}' + C_1 \hat{y}') \}, \quad (3.9)$$

onde:

$$S_1 = (\cos \theta_F + \cos \theta_0) \sin \theta_F, \quad (3.10)$$

$$C_1 = \sin \theta_F \sin \theta_0 - (1 + \cos \theta_F \cos \theta_0) \cos \phi_F, \quad (3.11)$$

$$\Delta = 1 + \cos \theta', \quad (3.12)$$

$$r_F = \frac{2F}{1 + \cos \theta'} = \frac{2F}{\Delta}. \quad (3.13)$$

De acordo com o método da abertura, o campo na abertura da antena é plano e dado pela equação (3.14).

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{E}_r e^{-jkZ_P} = \mathbf{E}_r e^{jk(r_F - 2F)}. \quad (3.14)$$

Logo, o campo na abertura é dado por

$$\mathbf{E}_A = \frac{1}{\Delta} \frac{e^{-j2kF}}{2F} \{ [A_\theta(\theta_F, \phi_F)](C_1 \hat{\mathbf{x}} + S_1 \hat{\mathbf{y}}) + [A_\phi(\theta_F, \phi_F)](S_1 \hat{\mathbf{x}} - C_1 \hat{\mathbf{y}}) \} \quad (3.15)$$

As funções A_θ e A_ϕ são definidas para que o alimentador não produza polarização cruzada, de acordo com as definições de Ludwig. A Terceira definição de Ludwig diz que um alimentador não irradia polarização cruzada [15].

As funções A_θ e A_ϕ são definidas em (3.16) e (3.17).

$$A_\theta(\theta_F, \phi_F) = f(\theta_F)(\cos \phi_F + \sin \phi_F), \quad (3.16)$$

$$A_\phi(\theta_F, \phi_F) = f(\theta_F)(\cos \phi_F - \sin \phi_F), \quad (3.17)$$

Assim, a expressão do campo na abertura é definida em (3.18).

$$\mathbf{E}_A = \frac{f(\theta_F)}{\Delta} \frac{e^{-j2kF}}{2F} \{ (\cos \phi_F + \sin \phi_F)(C_1 \hat{\mathbf{x}} + S_1 \hat{\mathbf{y}}) + (\cos \phi_F - \sin \phi_F)(S_1 \hat{\mathbf{x}} - C_1 \hat{\mathbf{y}}) \}. \quad (3.18)$$

A integral de radiação a partir do Método da Abertura utiliza das correntes equivalentes, dadas pelo princípio da equivalência, definidas em (3.19) e (3.20).

$$\mathbf{J}^\delta(\mathbf{r}', s) = \{ \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_A^\delta(\mathbf{r}', s) \} \delta(z), \quad (3.19)$$

$$\mathbf{M}^\delta(\mathbf{r}', s) = \{ \mathbf{E}_A^\delta(\mathbf{r}', s) \times \hat{\mathbf{z}} \} \delta(z), \quad (3.20)$$

onde $\delta(z)$ é a função Delta de Dirac.

A integral de radiação, conforme [2], [3] e [11] é definida em (3.21).

$$\mathbf{E}_{Ap}^u(\mathbf{r}, s) = -\frac{s}{4\pi c} \iint_{S_a} \frac{1}{R} [\{ \mathbf{E}_A^\delta(\mathbf{r}', s) \times \hat{\mathbf{z}} \} \times \hat{\mathbf{R}} + Z_0 \{ \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_A^\delta(\mathbf{r}', s) \}] e^{-\frac{sR}{c}} dS', \quad (3.21)$$

contendo o campo magnético radiado $\mathbf{H}_A^\delta(\mathbf{r}', s)$ e impedância intrínseca do meio Z_0 , escritos em (3.22) e (3.23).

$$\mathbf{H}_A^\delta(\mathbf{r}', s) = Z_0 \mathbf{E}_A^\delta(\mathbf{r}', s) \times \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.22)$$

$$Z_0 = \frac{1}{\eta}. \quad (3.23)$$

Aplicando (3.22) e (3.23) em (3.21), encontra-se a expressão do campo na abertura no domínio espectral referente ao impulso, dado em (3.24).

$$\mathbf{E}_{Ap}^u(r, s) = -\frac{s}{4\pi} \iint_{S_a} \frac{1}{R} [\{\mathbf{E}_A^\delta(r', s) \times \hat{\mathbf{z}}\} \times \hat{\mathbf{R}}] e^{-\frac{sR}{c}} dS'. \quad (3.24)$$

Considerando que $\mathbf{E}_A^\delta(r', s)$ é o campo descrito em (3.21), a equação acima pode ser reescrita, considerando a substituição proposta em (3.25).

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\theta_F, \phi_F) &= f(\theta_F) \{(\cos \phi_F + \sen \phi_F)(C_1 \hat{\mathbf{x}} + S_1 \hat{\mathbf{y}}) + (\cos \phi_F - \sen \phi_F)(S_1 \hat{\mathbf{x}} - C_1 \hat{\mathbf{y}})\} \\ \mathbf{g}(\theta_F, \phi_F) &= f(\theta_F) \{[S_1 \cos \phi_F + C_1 \sen \phi_F - C_1 \cos \phi_F + S_1 \sen \phi_F] \hat{\mathbf{x}} + [-C_1 \cos \phi_F + \\ S_1 \sen \phi_F - S_1 \cos \phi_F - C_1 \sen \phi_F] \hat{\mathbf{y}}\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Assim, o operador integral no domínio da frequência toma a expressão mostrada em (3.26).

$$\mathbf{E}_{Ap}^u(r, s) = -\frac{s}{4\pi c} \iint_{S_a} \frac{1}{2RF} [\mathbf{g}(\theta_F, \phi_F) \times \hat{\mathbf{R}}] e^{-s \frac{(2F+R)}{c}} dS'. \quad (3.26)$$

Os produtos vetoriais presentes em $\mathbf{g}(\theta_F, \phi_F) \times \hat{\mathbf{R}}$ podem ser resolvidos separadamente, como mostrado em (3.27) e (3.28).

$$\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{x}} = R_z \hat{\mathbf{y}} - R_y \hat{\mathbf{z}} \quad (3.27)$$

$$\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{y}} = -R_z \hat{\mathbf{x}} + R_x \hat{\mathbf{z}} \quad (3.28)$$

O vetor $\hat{\mathbf{R}}$ pode ser deduzido a partir da Figura 3.2,

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{r-\rho'}{R} \quad (3.29)$$

A partir dele, é possível extrair as seguintes relações:

$$R = \sqrt{(r-\rho)^2 + \xi^2} = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + \xi^2} \quad (3.30)$$

$$x - x' = -\xi \cos \alpha \quad (3.31)$$

$$y' - y = \xi \sen \alpha \quad (3.32)$$

$$\cos \theta' = \frac{4F^2 - \rho'^2}{4F^2 + \rho'^2}, \quad (3.42)$$

$$\text{sen } \theta' = \frac{4F\rho}{4F^2 + \rho'^2}, \quad (3.43)$$

$$r_F = \frac{4F^2 + \rho'^2}{4F}, \quad (3.44)$$

$$\rho'^2 = \xi'^2 + \rho^2 + 2\xi\rho \cos(\alpha - \phi_F). \quad (3.45)$$

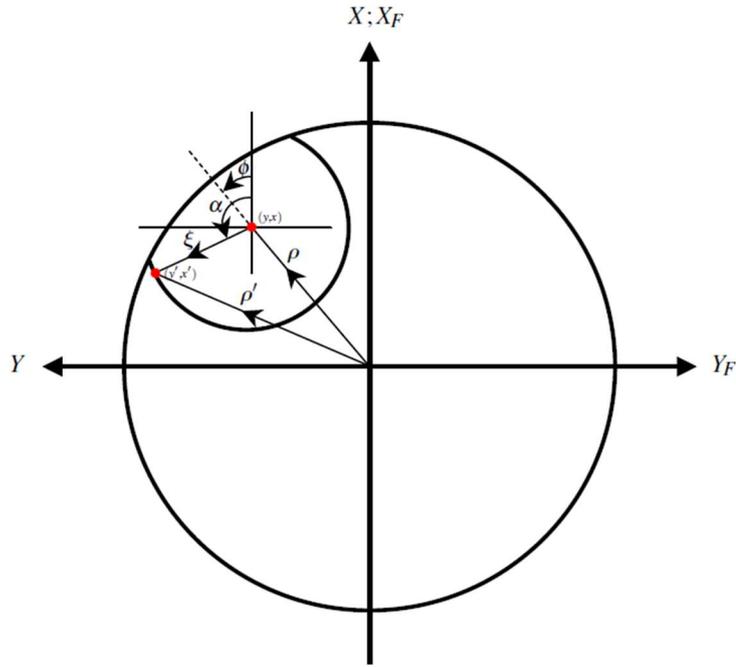


Figura 3.4 – Relação entre α e ξ .

Fonte: (FARIA,2017)

Aplicando as relações (3.42) e (3.43) em (3.41), têm-se a equação (3.46).

$$\cos \theta_F = \frac{4F^2 - \xi'^2 - \rho^2 - 2\xi\rho \cos(\alpha - \phi_F)}{4F^2 + \xi'^2 - \rho^2 - 2\xi\rho \cos(\alpha - \phi_F)} \cos \theta_0 + \frac{4F\rho \text{sen } \theta_0}{4F^2 + \xi'^2 + \rho^2 + 2\xi\rho \cos(\alpha - \phi_F)}. \quad (3.46)$$

A partir daqui, e repetindo adiante nesse trabalho, expressões que se repetem ao longo das equações são substituídas por representações, afim de facilitar a leitura.

$$a = 4F^2 - \xi^2 - \rho^2, \quad (3.47)$$

$$b = 4F^2 + \xi^2 + \rho^2, \quad (3.48)$$

$$h = 2\xi\rho, \quad (3.49)$$

$$c = 4F\rho \text{sen } \theta_0. \quad (3.50)$$

Assim, a equação (3.46) pode ser reescrita em (3.51):

$$\cos \theta_F = \frac{a-h \cos(\alpha-\phi_F)}{b+h c} \cos \theta_0 + \frac{c}{b+h c} \frac{1}{\cos(\alpha-\phi_F)}, \quad (3.51)$$

Tal qual feito em [11], aplica-se a expressão para o ângulo médio na equação (3.51), para que seja encontrada a equação referente ao alimentador cosseno elevado modificado, mostrada em (3.52).

$$\cos\left(\frac{\theta_F}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \frac{a-h \cos(\alpha-\phi_F)}{b+h c} \cos \theta_0 + \frac{c}{b+h c} \frac{1}{\cos(\alpha-\phi_F)}}{2}},$$

$$\cos\left(\frac{\theta_F}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\cos \theta_0 [a-h c \cos(\alpha-\phi_F)]}{2[b+h c \cos(\alpha-\phi_F)]} + \frac{c}{2[b+h c \cos(\alpha-\phi_F)]}}. \quad (3.52)$$

Considerando $d = \frac{\cos \theta_0}{2}$, e tornando-a genérica para qualquer expoente, a expressão para o alimentador cosseno elevado modificado, presente na função $\mathbf{g}(\theta_F, \phi_F)$ como $f(\theta_F)$ é mostrada em (3.53).

$$\cos^n\left(\frac{\theta_F}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{d[a-h c \cos(\alpha-\phi_F)]}{[b+h c \cos(\alpha-\phi_F)]} + \frac{c}{2[b+h c \cos(\alpha-\phi_F)]}\right)^{\frac{n}{2}}. \quad (3.53)$$

Fazendo a substituição:

$$\psi = \alpha - \phi_F, \quad (3.54)$$

a equação (3.53) se torna (3.55).

$$\cos^n\left(\frac{\theta_F}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{d[a-h c \cos(\psi)]}{[b+h c \cos(\psi)]} + \frac{c}{2[b+h c \cos(\psi)]}\right)^{\frac{n}{2}}. \quad (3.55)$$

Restam os termos S_1 e C_1 para serem reescritos. Partindo da equação (3.10), S_1 pode ser reescrito:

$$S_1 = (\cos \theta_F + \cos \theta_0) \sin \theta_F,$$

$$S_1 = (\cos \theta' \cos \theta_0 + \sin \theta' \sin \theta_0 + \cos \theta_0)(\sin \theta' \cos \theta_0 - \cos \theta' \sin \theta_0).$$

Aplicando a propriedade distributiva na multiplicação, e rearranjando os termos:

$$S_1 = \sin \theta' \cos \theta' (\cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0) + \cos \theta_0 \sin \theta_0 (\sin^2 \theta' - \cos \theta' - \cos^2 \theta') + \sin \theta' \cos^2 \theta_0,$$

$$S_1 = \sin \theta' \cos \theta' (\cos 2\theta_0) + \cos \theta_0 \sin \theta_0 (2 \sin^2 \theta' - \cos \theta' - 1) + \sin \theta' \cos^2 \theta_0.$$

Para tornar melhor a leitura é feita a substituição de expressões que vão ser repetidas durante o trabalho por suas representações mostradas em (3.56) e (3.57).

$$m = \cos \theta_0 \sin \theta_0 \quad (3.56)$$

$$e = \cos 2\theta_0 \quad (3.57)$$

Assim:

$$S_1 = e \sin \theta' \cos \theta' + m(2 \sin^2 \theta' - \cos \theta' - 1) + \sin \theta' \cos^2 \theta_0,$$

$$S_1 = e \frac{4F\rho}{4F^2 + \rho'^2} \frac{4F^2 - \rho'^2}{4F^2 + \rho'^2} + m \left(\frac{32F^2 \rho^2}{(4F^2 + \rho'^2)^2} - \frac{4F^2 - \rho'^2}{4F^2 + \rho'^2} - 1 \right) + \frac{4F\rho}{4F^2 + \rho'^2} \cos^2 \theta_0.$$

E S_1 pode ser reescrito e mostrado em (3.58):

$$S_1 = \frac{4F e \rho (a-h \cos \psi)}{(b+h \cos \psi)^2} + \frac{32F^2 \rho^2 m}{(b+h \cos \psi)^2} - \frac{m(a-h \cos \psi)}{(b+h \cos \psi)^2} - m + \frac{4F\rho \cos^2 \theta_0}{b+h \cos \psi}. \quad (3.58)$$

Repetindo o processo para C_1 :

$$C_1 = \sin \theta_F \sin \theta_0 - (1 + \cos \theta_F \cos \theta_0) \cos \phi_F$$

$$C_1 = (\sin \theta' \cos \theta_0 - \cos \theta' \sin \theta_0) \sin \theta_0 - [1 + (\cos \theta' \cos \theta_0 + \sin \theta' \sin \theta_0) \cos \theta_0] \cos \phi_F$$

$$C_1 = m \sin \theta' - \sin^2 \theta_0 \cos \theta' - \cos \phi_F - \cos \phi_F \cos \theta' \cos^2 \theta_0 - m \cos \phi_F \sin \theta'$$

$$C_1 = m \sin \theta' (1 - \cos \phi_F) - \cos \theta' (\sin^2 \theta_0 + \cos \phi_F \cos^2 \theta_0) - \cos \phi_F$$

$$C_1 = m \frac{4F\rho}{4F^2 + \rho'^2} (1 - \cos \phi_F) - \frac{4F^2 - \rho'^2}{4F^2 + \rho'^2} (\sin^2 \theta_0 + \cos \phi_F \cos^2 \theta_0) - \cos \phi_F$$

E C_1 pode ser reescrito e mostrado em (3.59):

$$C_1 = \frac{4F m \rho}{b+h \cos \psi} (1 - \cos \phi_F) - \frac{a-h \cos \psi}{b+h \cos \psi} (\sin^2 \theta_0 + \cos \phi_F \cos^2 \theta_0) - \cos \phi_F. \quad (3.59)$$

Com S_1 e C_1 escritos em função de ϕ_F e θ_0 , as expressões para a função g , (3.37) a (3.39) podem ser reescritas e são mostradas em (3.60), (3.61) e (3.62):

$$\mathbf{g}_x(\theta_0, \phi_F) = -\sin \gamma (C_1 \cos \phi_F - S_1 \sin \phi_F + S_1 \sin \phi_F + C_1 \sin \phi_F), \quad (3.60)$$

$$\mathbf{g}_y(\theta_0, \phi_F) = -\sin \gamma (S_1 \cos \phi_F + C_1 \sin \phi_F - C_1 \cos \phi_F + S_1 \sin \phi_F), \quad (3.61)$$

$$\mathbf{g}_z(\theta_0, \phi_F) = -(\sin \alpha \cos \gamma)(C_1 \cos \phi_F - S_1 \sin \phi_F + S_1 \sin \phi_F + C_1 \sin \phi_F) - (\cos \alpha \cos \gamma)(S_1 \cos \phi_F + C_1 \sin \phi_F - C_1 \cos \phi_F + S_1 \sin \phi_F). \quad (3.62)$$

A expressão final do operador integral no domínio da frequência é então reescrita e mostrada em (3.63).

$$\mathbf{E}_{\text{Ap}}^u(r, s) = -\frac{s}{4\pi c} \iint_{S_a} \frac{1}{2RF} [\mathbf{g}(\theta_0, \phi_F) \times \hat{\mathbf{R}}] e^{-s\left(\frac{2F+R}{c}\right)} dS'. \quad (3.63)$$

3.1.2 Domínio do Tempo

Com a expressão do operador integral no domínio da frequência definida, para encontrar as equações temporais, é necessário utilizar a Transformada Inversa de Laplace, especificamente a transformada de deslocamento temporal, mostrada em (3.64).

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}\} = \delta(t - a). \quad (3.64)$$

Assim como foi utilizado em [11] para o caso particular de (3.64) a transformada inversa toma a forma mostrada em (3.65).

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s\left(\frac{2F+R}{c}\right)}\right\} = \delta\left(t - \frac{2F+R}{c}\right). \quad (3.65)$$

Substituindo (3.65) em (3.63), têm-se (3.67).

$$\mathbf{E}_{\text{Ap}}^u(r, t) = -\frac{1}{4\pi c} \iint_{S_a} \frac{1}{2RF} [\mathbf{g}(\theta_0, \phi_F) \times \hat{\mathbf{R}}] \delta\left(t - \frac{2F+R}{c}\right) dS', \quad (3.66)$$

$$\mathbf{E}_{\text{Ap}}^u(r, t) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_a} \frac{1}{2RF} [\mathbf{g}(\theta_0, \phi_F) \times \hat{\mathbf{R}}] \delta(ct - 2F - R) dS'. \quad (3.67)$$

Aplicando a propriedade associada à função Delta de Dirac [1] [[5], mostrada em (3.68).

$$\delta(ct - 2F - R) dS' = \frac{\delta(\xi - \xi')}{\left|\frac{d}{d(\xi)}\left(t - \frac{2F+R}{c}\right)\right|_{\xi=\xi'}} = \frac{\delta(\xi - \xi')}{\left|\frac{1}{c} \frac{dR}{d(\xi)}\right|_{\xi=\xi'}}. \quad (3.68)$$

Tal propriedade reduz o limite de integração à superfície refletora numa área ao longo do contorno C . Fisicamente o caminho C é o traçado circular da frente de onda traçado pelo ponto Q na abertura, equivalente a projeção do ponto P do observador na dita abertura. Em suma, tal propriedade permite converter uma integral de superfície em uma integral de linha, facilitando a manipulação e desenvolvimento das expressões temporais.

Com base na Figura 3.5, é possível encontrar a relação para ξ mostrada em (3.69).

$$\xi = \rho' - \rho. \quad (3.69)$$

ou seja, ξ é dado pela diferença entre um vetor ρ que parte da origem do plano de abertura em direção ao ponto Q e um vetor ρ' que também parte da origem e segue em direção à fonte de corrente dada pelo contorno da frente de onda.

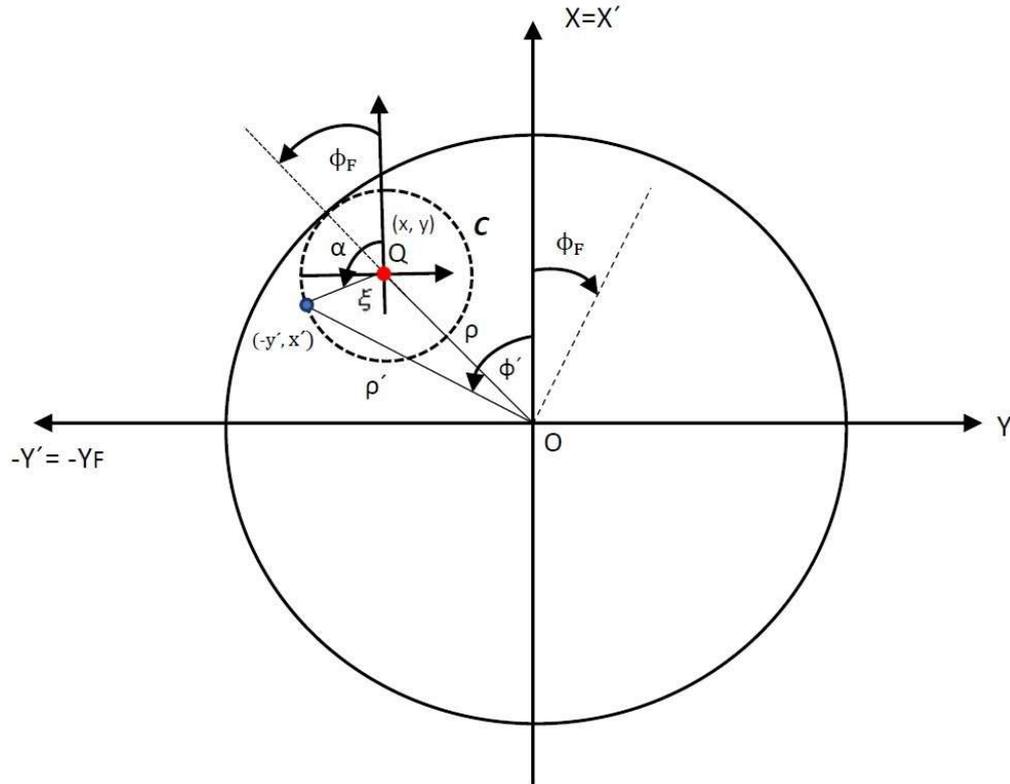


Figura 3.5 – Frente de Onda Incidente no ponto Q

Fonte: Figura Modificada (CHOW et al. 1997) e (GOMEZJURADO,2021)

A distância entre a abertura e o ponto do observador, o vetor \mathbf{R} , pode ser extraída da Figura 3.3:

$$\begin{aligned} R &= |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}'|, \\ R &= |\mathbf{r} - (\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\rho})|, \\ R &= \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + \xi^2}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

E assim, (3.68) se torna (3.71).

$$\frac{\delta(\xi - \xi')}{\left| \frac{1}{c} \frac{dR}{d(\xi)} \right|_{\xi=\xi'}} = \frac{cR_0}{\xi'} \delta(\xi - \xi'). \quad (3.71)$$

com R_0 dado por (3.72).

$$R_0 = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + \xi'^2}. \quad (3.72)$$

A variável ξ' é dada pela raiz do argumento da função Delta de Dirac considerando $\mathbf{R} = R_0$. Nesse caso, podem existir dois valores para ξ' . Como essa equivale a uma distância, deve-se utilizar o valor positivo, logo, ξ' é definido em (3.73):

$$\xi' = \left| \sqrt{(ct - 2F)^2 - r^2 \cos^2 \theta} \right|. \quad (3.73)$$

Substituindo a equação (3.73) em (3.67), têm-se (3.74).

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{Ap}}^u(r, t) &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_a} \frac{1}{2RF} [\mathbf{g}(\theta_0, \phi_F) \times \hat{\mathbf{R}}] \frac{cR_0}{\xi'} \delta(\xi - \xi') \xi \, d\alpha d\xi, \\ \mathbf{E}_{\text{Ap}}^u(r, t) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{2RF} [\mathbf{g}(\theta_0, \phi_F) \times \hat{\mathbf{R}}] \frac{cR_0}{\xi'} \delta(\xi - \xi') \xi \, d\alpha d\xi, \\ \mathbf{E}_{\text{Ap}}^u(r, t) &= -\frac{1}{8\pi} [U(t - t_1) - U(t - t_2)] \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{F} [\mathbf{g}(\theta_0, \phi_F) \times \hat{\mathbf{R}}] \Big|_{\xi=\xi'} d\alpha. \end{aligned} \quad (3.74)$$

onde $[U(t - t_1) - U(t - t_2)]$ são termos associados à função degrau, e os limites α_2 e α_1 são dependentes da relação $\xi = \xi'$.

De modo a facilitar a manipulação e entendimento das equações, define-se a função porta em (3.75).

$$\Pi(t) = [U(t - t_1) - U(t - t_2)]. \quad (3.75)$$

Para encontrar as equações finais, resta definir os instantes de tempo t_1 e t_2 , bem como os limites de integração α_1 e α_2 da equação (3.74) e realizar a integração.

3.1.3 Limites de Integração no Tempo

Os instantes de tempo t_1 e t_2 estão relacionados com parâmetros geométricos da antena, e indicam o início e término da resposta ao degrau da antena, respectivamente. A partir da Figura 3.6 e Figura 3.7, é possível observar e extrair tais instantes pela variação da posição do observador no plano de abertura.

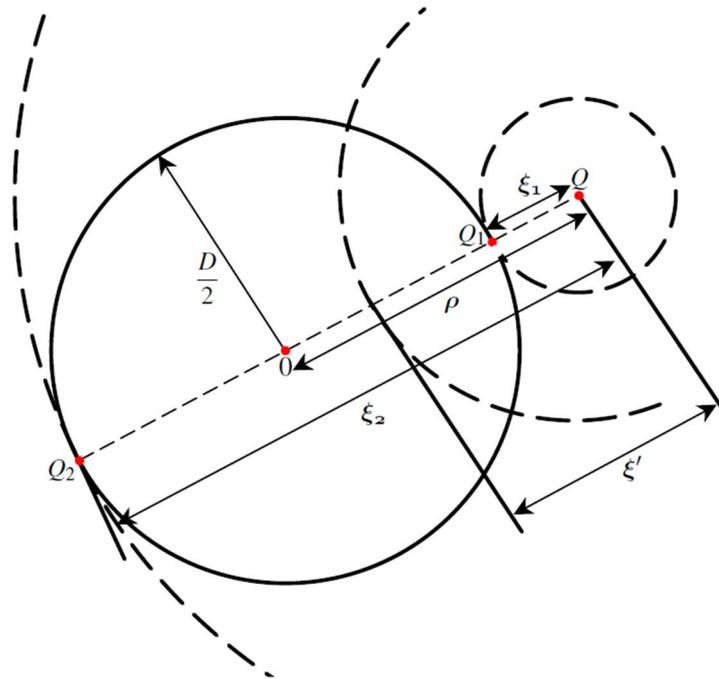


Figura 3.6 – Limites para integração em ξ quando $\xi = \xi'$, sendo $\xi_1 < \xi = \xi'$ e $\rho > \frac{D}{2}$.

Fonte: Figura Modificada (CHOW et al. 1997)

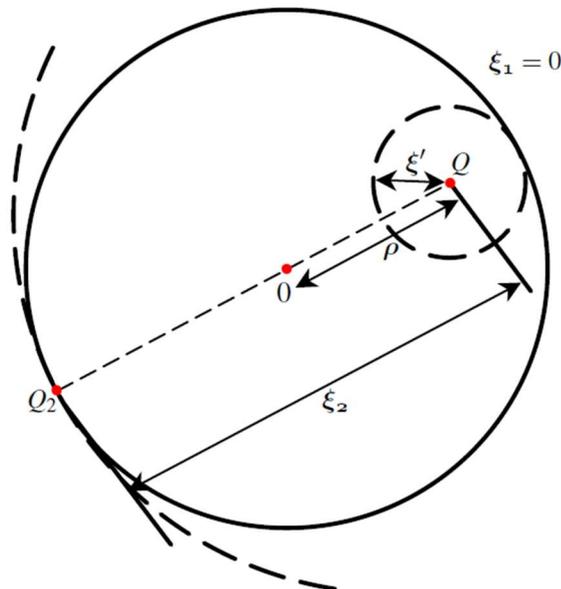


Figura 3.7 - Limites para integração em ξ quando $\xi = \xi'$, sendo $\xi_1 < \xi = \xi'$ e $\rho < \frac{D}{2}$.

Fonte: Figura Modificada (CHOW et al. 1997)

Quando o ponto de observação P, e conseqüentemente sua projeção no plano de abertura Q estão localizados fora da abertura circular, ou seja, $\rho > D/2$, caso da Figura 3.6, a primeira contribuição para o campo refletido é dada no instante t_1 por meio dos segmentos $\overline{O_F Q_1} + \overline{Q_1 P}$. Já quando $\rho < D/2$ a projeção $Q = Q_1$ e os valores de ξ_1 são definidos em (3.76).

$$\xi_1 = \begin{cases} \rho - \frac{D}{2}, & \rho > \frac{D}{2} \\ 0, & \rho < \frac{D}{2} \end{cases} \quad (3.76)$$

Assim, o instante t_1 em que o sinal é inicialmente detectado é dado, de acordo com [1], por (3.77).

$$t_1 = \begin{cases} \frac{1}{c} \left(\sqrt{r^2 - Dr \sin \theta + \frac{D^2}{4} + 2F} \right), & \rho > \frac{D}{2} \\ \frac{1}{c} (r^2 \cos^2 \theta + 2F), & \rho < \frac{D}{2} \end{cases} \quad (3.77)$$

Considerando agora um instante de tempo $t > t_1$ a contribuição do campo radiado no ponto P vem do arco crescente de raio ξ' até que $\xi' = \xi_2$. Dessa forma ξ_2 é escrito em (3.78).

$$\xi_2 = \rho + \frac{D}{2}. \quad (3.78)$$

E o valor de t_2 , quando o sinal termina no ponto de observação é dado, de acordo novamente com [1], por (3.79).

$$t_2 = \frac{1}{c} \left(\sqrt{r^2 + Dr \sin \theta + \frac{D^2}{4} + 2F} \right). \quad (3.79)$$

Os instantes t_1 e t_2 são utilizados para encontrar os limites de integração α_1 e α_2 . A partir da Figura 3.8, proposta em [1], é possível escrevê-las, e são mostradas em (3.80), (3.81) e (3.82).

$$\cos \Omega = \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - (\xi'^2 + \rho^2)}{2\xi'\rho}, \quad (3.80)$$

$$\alpha_1 = \begin{cases} \phi + \Omega, & |\cos \Omega| < 1 \\ 0, & |\cos \Omega| > 1 \end{cases} \quad (3.81)$$

$$\alpha_2 = 2\pi - \alpha_1. \quad (3.82)$$

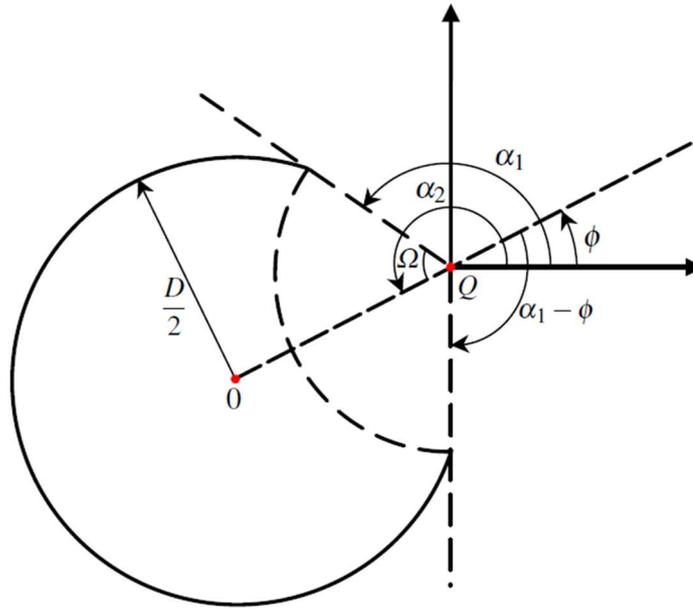


Figura 3.8 - Limites para integração em α .

Fonte: Figura Modificada (CHOW et al. 1997)

Aplicando os limites de integração (3.80), (3.81) e (3.82) em (3.74), encontra-se a equação do operador integral no domínio do tempo. Cabe dizer que a partir desse ponto do texto, as equações serão decompostas em suas coordenadas cartesianas, já que a função $g(\theta_0, \Phi_F)$ é composta pelas 3 coordenadas. As equações do operador integral no domínio do tempo são apresentadas em (3.83), (3.84) e (3.85).

$$\mathbf{E}_{\text{Ap}x}^u(r, t) = \frac{\Pi(t)}{8\pi F} \int_{\alpha_1 - \phi}^{2\pi - \alpha_1 + \phi} \left(\frac{1}{2} + \frac{d[a - h \cos(\psi)]}{[b + h \cos(\psi)]} + \frac{c}{2[b + h \cos(\psi)]} \right)^{\frac{n}{2}} g_x(\theta_0, \Phi_F) d\psi \quad (3.83)$$

$$\mathbf{E}_{\text{Ap}y}^u(r, t) = \frac{\Pi(t)}{8\pi} \int_{\alpha_1 - \phi}^{2\pi - \alpha_1 + \phi} \left(\frac{1}{2} + \frac{d[a - h \cos(\psi)]}{[b + h \cos(\psi)]} + \frac{c}{2[b + h \cos(\psi)]} \right)^{\frac{n}{2}} g_y(\theta_0, \Phi_F) d\psi \quad (3.84)$$

$$\mathbf{E}_{\text{Ap}z}^u(r, t) = \frac{\Pi(t)}{8\pi F} \int_{\alpha_1 - \phi}^{2\pi - \alpha_1 + \phi} \left(\frac{1}{2} + \frac{d[a - h \cos(\psi)]}{[b + h \cos(\psi)]} + \frac{c}{2[b + h \cos(\psi)]} \right)^{\frac{n}{2}} g_z(\theta_0, \Phi_F) d\psi \quad (3.85)$$

3.2 Equações do Operador Integral com n inteiro e positivo

Após todo o processo de obtenção da equação do operador integral no domínio da frequência e transformação via FFT para o domínio do tempo, resta resolver a integral, que advém da superfície de abertura, para encontrar as equações finais do operador integral.

Neste trabalho, assim como feito em [11], o ângulo de azimute ϕ_F é definido em 0° , reduzindo algumas expressões, como as funções $g_x(\theta_0, \phi_F)$, $g_y(\theta_0, \phi_F)$ e $g_z(\theta_0, \phi_F)$, que são descritas em (3.60) a (3.62), e são reescritas a partir das definições de S_1 e C_1 , resultando em (3.86), (3.87) e (3.88), respectivamente.

$$g_x(\theta_0, \phi_F) = \text{sen } \gamma \left\{ -\frac{a}{[b+h \cos(\psi)]} + \frac{h \cos(\psi)}{[b+h \cos(\psi)]} - 1 + \frac{4 F e \rho a}{[b+h \cos(\psi)]^2} - \frac{4 F e \rho h \cos(\psi)}{[b+h \cos(\psi)]^2} + \frac{32 F^2 \rho^2 m}{[b+h \cos(\psi)]^2} - \frac{m a}{[b+h \cos(\psi)]} + \frac{m h \cos(\psi)}{[b+h \cos(\psi)]} - m + \frac{q}{[b+h \cos(\psi)]} \right\} \quad (3.86)$$

$$g_y(\theta_0, \phi_F) = \text{sen } \gamma \left\{ \frac{4 F e \rho a}{[b+h \cos(\psi)]^2} - \frac{4 F e \rho h \cos(\psi)}{[b+h \cos(\psi)]^2} + \frac{32 F^2 \rho^2 m}{[b+h \cos(\psi)]^2} - \frac{m a}{[b+h \cos(\psi)]} + \frac{m h \cos(\psi)}{[b+h \cos(\psi)]} - m + \frac{q}{[b+h \cos(\psi)]} + \frac{a}{[b+h \cos(\psi)]} - \frac{h \cos(\psi)}{[b+h \cos(\psi)]} + 1 \right\} \quad (3.87)$$

$$g_z(\theta_0, \phi_F) = \cos \gamma \left\{ -\text{sen } \alpha \left\{ -\frac{a}{[b+h \cos(\psi)]} + \frac{h \cos(\psi)}{[b+h \cos(\psi)]} - 1 + \frac{4 F e \rho a}{[b+h \cos(\psi)]^2} - \frac{4 F e \rho h \cos(\psi)}{[b+h \cos(\psi)]^2} + \frac{32 F^2 \rho^2 m}{[b+h \cos(\psi)]^2} - \frac{m a}{[b+h \cos(\psi)]} + \frac{m h \cos(\psi)}{[b+h \cos(\psi)]} - m + \frac{q}{[b+h \cos(\psi)]} \right\} - \cos \alpha \left\{ \frac{4 F e \rho a}{[b+h \cos(\psi)]^2} - \frac{4 F e \rho h \cos(\psi)}{[b+h \cos(\psi)]^2} + \frac{32 F^2 \rho^2 m}{[b+h \cos(\psi)]^2} - \frac{m a}{[b+h \cos(\psi)]} + \frac{m h \cos(\psi)}{[b+h \cos(\psi)]} - m + \frac{q}{[b+h \cos(\psi)]} + \frac{a}{[b+h \cos(\psi)]} - \frac{h \cos(\psi)}{[b+h \cos(\psi)]} + 1 \right\} \right\} \quad (3.88)$$

Assim, aplicando (3.86), (3.87) e (3.88), em (3.83), (3.84) e (3.85) respectivamente as equações para cada coordenada cartesiana do operador integral no domínio do tempo são

$$\mathbf{E}_{\text{Apx}}^u(\mathbf{r}, t) = \frac{\text{sen } \gamma \Pi(t)}{8\pi F} \int_{\alpha_1 - \phi}^{2\pi - \alpha_1 + \phi} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{d[a - h \cos(\psi)]}{[b + h \cos(\psi)]} + \frac{c}{2[b + h \cos(\psi)]} \right\}^{\frac{n}{2}} \left\{ -\frac{a}{[b + h \cos(\psi)]} + \frac{h \cos(\psi)}{[b + h \cos(\psi)]} - 1 + \frac{4 F e \rho a}{[b + h \cos(\psi)]^2} - \frac{4 F e \rho h \cos(\psi)}{[b + h \cos(\psi)]^2} + \frac{32 F^2 \rho^2 m}{[b + h \cos(\psi)]^2} - \frac{m a}{[b + h \cos(\psi)]} + \frac{m h \cos(\psi)}{[b + h \cos(\psi)]} - m + \frac{q}{[b + h \cos(\psi)]} \right\} d\psi \quad (3.89)$$

$$\mathbf{E}_{\text{Apy}}^u(\mathbf{r}, t) = \frac{\text{sen } \gamma \Pi(t)}{8\pi} \int_{\alpha_1 - \phi}^{2\pi - \alpha_1 + \phi} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{d[a - h \cos(\psi)]}{[b + h \cos(\psi)]} + \frac{c}{2[b + h \cos(\psi)]} \right\}^{\frac{n}{2}} \left\{ \frac{4 F e \rho a}{[b + h \cos(\psi)]^2} - \frac{4 F e \rho h \cos(\psi)}{[b + h \cos(\psi)]^2} + \frac{32 F^2 \rho^2 m}{[b + h \cos(\psi)]^2} - \frac{m a}{[b + h \cos(\psi)]} + \frac{m h \cos(\psi)}{[b + h \cos(\psi)]} - m + \frac{q}{[b + h \cos(\psi)]} + \frac{a}{[b + h \cos(\psi)]} - \frac{h \cos(\psi)}{[b + h \cos(\psi)]} + 1 \right\} d\psi \quad (3.90)$$

$$\mathbf{E}_{\text{Apz}}^u(\mathbf{r}, t) = \frac{\text{cos } \gamma \Pi(t)}{8\pi F} \int_{\alpha_1 - \phi}^{2\pi - \alpha_1 + \phi} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{d[a - h \cos(\psi)]}{[b + h \cos(\psi)]} + \frac{c}{2[b + h \cos(\psi)]} \right\}^{\frac{n}{2}} \left\{ -\text{sen } \alpha \left\{ -\frac{a}{[b + h \cos(\psi)]} + \frac{h \cos(\psi)}{[b + h \cos(\psi)]} - 1 + \frac{4 F e \rho a}{[b + h \cos(\psi)]^2} - \frac{4 F e \rho h \cos(\psi)}{[b + h \cos(\psi)]^2} + \frac{32 F^2 \rho^2 m}{[b + h \cos(\psi)]^2} - \frac{m a}{[b + h \cos(\psi)]} + \frac{m h \cos(\psi)}{[b + h \cos(\psi)]} - m + \frac{q}{[b + h \cos(\psi)]} \right\} - \text{cos } \alpha \left\{ \frac{4 F e \rho a}{[b + h \cos(\psi)]^2} - \frac{4 F e \rho h \cos(\psi)}{[b + h \cos(\psi)]^2} + \frac{32 F^2 \rho^2 m}{[b + h \cos(\psi)]^2} - \frac{m a}{[b + h \cos(\psi)]} + \frac{m h \cos(\psi)}{[b + h \cos(\psi)]} - m + \frac{q}{[b + h \cos(\psi)]} + \frac{a}{[b + h \cos(\psi)]} - \frac{h \cos(\psi)}{[b + h \cos(\psi)]} + 1 \right\} \right\} d\psi \quad (3.91)$$

Para realizar a multiplicação de $g(\theta_0, \phi_F)$ com o restante do integrando, bem como realizar a integral em si, aplicando os limites de integração, foi utilizado o *software* Mathematica™ 12.3 e do pacote de integração RUBI, assim como feito em [3] e [11]. O pacote RUBI, acrônimo para *Rule-based Integrator*, é um pacote fundamentado em regras de transformação, e baseado em 4 propriedades: Funcionalidade, Limitação dos domínios de Validade, Simplificações, Variáveis Locais e Exclusividade Mútua. Um dos maiores benefícios

proporcionados pelo RUBI é a capacidade de fornecer resultados em formato simplificado, utilizando, sempre que possível, funções elementares [16].

Após a integração, é encontrada as equações finais para o operador integral no domínio do tempo, extraídas do *software* e apresentadas em (3.92), (3.93) e (3.94).

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_x^{\delta,u}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = & \frac{\text{sen } \gamma \Pi(t)}{8\pi F} \left\{ \frac{2^{2-\frac{n}{2}}}{3[b+H]^2} \left\{ 1 - 2d + \frac{c + 2d[A+b]}{b(t) + \text{Cos}[\phi - \alpha_1(t)]H(t)} \right\}^{\frac{n}{2}} \tan \left[\frac{\phi - \alpha_1}{2} \right] \right. \\
& \left. \left\{ 1 + \frac{[b-H] \tan \left[\frac{\phi - \alpha_1}{2} \right]^2}{b+H} \right\}^{-\frac{n}{2}} \left\{ 1 + \frac{\{c+b-H+2d[A+H]\} \tan \left[\frac{\phi - \alpha_1}{2} \right]^2}{c+2dA+b+H-2dH} \right\}^{-\frac{n}{2}} \right. \\
& \left. 3F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{4+n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \text{arg1}, \text{arg2} \right) \right. \\
& \left. \{32F^2 m \rho^2 - 4eF\rho H + q[b+H] - (1+m)b[b+H] + A[4eF\rho - (1+m)b - (1+m)H]\} \right. \\
& \left. + F_1 \left(\frac{3}{2}, \frac{4+n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{5}{2}, \text{arg1}, \text{arg2} \right) \{32F^2 m \rho^2 + qb - qH + 4eF\rho H + (1+m)b[H-b] \right. \\
& \left. + A[4eF\rho - (1+m)b + (1+m)H]\} \tan \left[\frac{\phi - \alpha_1}{2} \right]^2 \right\}
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Com os seguintes argumentos na função Appell F_1 :

$$\begin{aligned}
\text{arg1} &= \frac{[H(t) - b(t)] \tan \left[\frac{\phi - \alpha_1(t)}{2} \right]^2}{b(t) + H(t)} \\
\text{arg2} &= -\frac{\{c+b-H+2d[A+H]\} \tan \left[\frac{\phi - \alpha_1(t)}{2} \right]^2}{c+2dA+b+H-2dH}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_y^{\delta,u}(\mathbf{r}, t) = & \frac{\text{sen } \gamma \Pi(t)}{8\pi F} \left\{ \frac{2^{2-\frac{n}{2}}}{3[b+H]^2} \left\{ 1 - 2d + \frac{c + 2d[A+b]}{b(t) + \text{Cos}[\phi - \alpha_1(t)]H(t)} \right\}^{\frac{n}{2}} \tan \left[\frac{\phi - \alpha_1}{2} \right] \right. \\
& \left. \left\{ 1 + \frac{[b-H] \tan \left[\frac{\phi - \alpha_1}{2} \right]^2}{b+H} \right\}^{-\frac{n}{2}} \left\{ 1 + \frac{\{c+b-H+2d[A+H]\} \tan \left[\frac{\phi - \alpha_1}{2} \right]^2}{c+2dA+b+H-2dH} \right\}^{-\frac{n}{2}} \right. \\
& \left. 3F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{4+n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \text{arg1}, \text{arg2} \right) \right. \\
& \left. \{32F^2 m \rho^2 - 4eF\rho H + q[b+H] - (m-1)b[b+H] + A[4eF\rho - (m-1)b - (m-1)H]\} \right. \\
+ F_1 \left(\frac{3}{2}, \frac{4+n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{5}{2}, \text{arg1}, \text{arg2} \right) & \left. \{32F^2 m \rho^2 + qb - qH + 4eF\rho H + (m-1)b[H-b] \right. \\
& \left. + A[4eF\rho - (m-1)b + (m-1)H]\} \tan \left[\frac{\phi - \alpha_1}{2} \right]^2 \right\}
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Com os seguintes argumentos na função Appell F_1 :

$$\begin{aligned}
\text{arg1} &= \frac{[H(t) - b(t)] \tan \left[\frac{\phi - \alpha_1(t)}{2} \right]^2}{b(t) + H(t)} \\
\text{arg2} &= - \frac{\{c+b-H+2d[A+H]\} \tan \left[\frac{\phi - \alpha_1(t)}{2} \right]^2}{c+2dA+b+H-2dH}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_z^{\delta,u}(\mathbf{r}, t) = & \frac{\cos \gamma \Pi(t)}{8\pi F} \left\{ \frac{2^{2-\frac{n}{2}}}{3[b+H]^2} \left\{ 1 - 2d + \frac{c + 2d[A+b]}{b(t) + \cos[\phi - \alpha_1(t)]H(t)} \right\}^{\frac{n}{2}} \tan \left[\frac{\phi - \alpha_1}{2} \right] \right. \\
& \left. \left\{ 1 + \frac{[b-H] \tan \left[\frac{\phi - \alpha_1}{2} \right]^2}{b+H} \right\}^{-\frac{n}{2}} \left\{ 1 + \frac{\{c+b-H+2d[A+H]\} \tan \left[\frac{\phi - \alpha_1}{2} \right]^2}{c+2dA+b+H-2dH} \right\}^{-\frac{n}{2}} \right. \\
& \left. \left\{ {}_3F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{4+n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \arg 1, \arg 2 \right) \right. \right. \\
& \left. \left\{ \cos[\alpha_1] \{32F^2 m \rho^2 - 4eF\rho H + q[b+H] - (m-1)b[b+H] \right. \right. \\
& \left. \left. + A[4eF\rho - (m-1)b - (m-1)H] \right\} \right. \\
& \left. + \sin[\alpha_1] \{32F^2 m \rho^2 + qb - qH + 4eF\rho H + (m-1)b[H-b] \right. \\
& \left. \left. + A[4eF\rho - (m-1)b + (m-1)H] \right\} \right. \\
& \left. + F_1 \left(\frac{3}{2}, \frac{4+n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{5}{2}, \arg 1, \arg 2 \right) \tan \left[\frac{\phi - \alpha_1}{2} \right]^2 \right. \\
& \left. \left\{ \cos[\alpha_1] \{32F^2 m \rho^2 - 4eF\rho H + q[b+H] - (m-1)b[b+H] \right. \right. \\
& \left. \left. + A[4eF\rho - (m-1)b - (m-1)H] \right\} \right. \\
& \left. + \sin[\alpha_1] \{32F^2 m \rho^2 + qb - qH + 4eF\rho H + (m-1)b[H-b] \right. \\
& \left. \left. + A[4eF\rho - (m-1)b + (m-1)H] \right\} \right\} \\
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Com os seguintes argumentos na função Appell F_1 :

$$\begin{aligned}
\arg 1 &= \frac{[H(t) - b(t)] \tan \left[\frac{\phi - \alpha_1(t)}{2} \right]^2}{b(t) + H(t)} \\
\arg 2 &= - \frac{\{c+b-H+2d[A+H]\} \tan \left[\frac{\phi - \alpha_1(t)}{2} \right]^2}{c+2dA+b+H-2dH}
\end{aligned}$$

É notável, nas 3 equações, a função hipergeométrica Appell F_1 , bem como variáveis que foram construídas ao longo da formulação para diminuir o tamanho das equações, facilitando o entendimento. Foram listadas todas essas funções, e vale ressaltar que em sua maioria, são dependentes do tempo.

$$A = 4F^2 - \rho^2 - \xi'^2, \quad (3.95)$$

$$b = 4F^2 - \rho^2 + \xi'^2, \quad (3.96)$$

$$c = 4F\rho \operatorname{sen} \theta_0, \quad (3.97)$$

$$d = \frac{\cos \theta_0}{2}, \quad (3.98)$$

$$e = \cos(2\theta_0), \quad (3.99)$$

$$H = 2\xi'\rho, \quad (3.100)$$

$$m = \cos(\theta_0) \operatorname{sen}(\theta_0), \quad (3.101)$$

$$q = 4F\rho \cos^2 \theta_0. \quad (3.102)$$

3.2.1 Função Hipergeométrica Appell

É notável nas expressões finais do operador integral no domínio do tempo a função F_1 , conhecida como Hipergeométrica Appell, que em suma, representa a solução da equação diferencial de Gauss, quando essa é aplicada para duas variáveis e cuja qual é definida como uma equação diferencial ordinária, de segunda ordem, linear e homogênea [12].

A equação diferencial hipergeométrica, como também é conhecida, ao apresentar três pontos singulares, incluindo um ponto no infinito, fica caracterizada como equação diferencial de Riemann-Papperitz. Ao definir os outros dois pontos singulares em zero e 1, chega-se na equação hipergeométrica [12].

Partindo de uma equação diferencial de 2ª ordem, ordinária, linear e homogênea genérica, e estabelecendo que tal equação aceite três pontos singulares, incluindo um ponto no infinito, é possível escrever a equação diferencial de Riemann-Papperitz [12], mostrada em (3.103).

$$\frac{d^2}{dz^2} w(z) + \left[\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-z_1} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-z_2} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-z_3} \right] \frac{d}{dz} w(z) + \left[\frac{\alpha\alpha'(z_1-z_2)(z_1-z_3)}{z-z_1} + \frac{\beta\beta'(z_2-z_3)(z_2-z_1)}{z-z_2} + \frac{\gamma\gamma'(z_3-z_1)(z_3-z_2)}{z-z_3} \right] \frac{w(z)}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)} = 0, \quad (3.103)$$

onde $z_1, z_2,$ e z_3 são os pontos singulares regulares e $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ e γ, γ' são os expoentes associados aos pontos. A combinação de uma transformação bi linear [12] a transformação mostrada em (3.104).

$$w(z) = (z - z_1)^{-\lambda}(z - z_2)^{-\mu}(z - z_3)^{-\nu}v(z), \quad (3.104)$$

onde $\lambda + \mu + \nu = 0$, torna possível levar os pontos singulares $z_1, z_2,$ e z_3 nos pontos 0, 1 e ∞ .

Ao impor as condições:

$$\alpha + \beta + \gamma = a,$$

$$\alpha + \beta' + \gamma = b,$$

$$1 + \alpha - \alpha' = c.$$

é obtida a equação diferencial que é definida como equação hipergeométrica, mostrada em $z(1-z) \frac{d^2w}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{dw}{dz} - abw(z) = 0.$ (3.105).

$$z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} w(z) + [c - (a+b+1)z] \frac{d}{dz} w(z) - abw(z) = 0. \quad (3.105)$$

Nas vizinhanças da origem, ou seja, quando $z = 0$, a solução da equação hipergeométrica pode ser escrita utilizando o Método de Frobenius. Tal método permite solucionar equações diferenciais em termos de séries de potências. Para a equação hipergeométrica utilizou-se (3.106).

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{n+s}, \quad (3.106)$$

onde d_n são os coeficientes e s o parâmetro livre.

Substituindo (3.106) em (3.105) têm-se (3.107).

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s+c-1)d_n z^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty} [(n+s)(n+s+a+b) + ab]d_n z^{n+s} = 0, \quad (3.107)$$

onde é possível perceber uma equação inicial e a relação de recorrência.

A Equação Inicial é dada por (3.108).

$$s(s+c-1) = 0. \quad (3.108)$$

Enquanto a relação de recorrência é dada por (3.109).

$$d_n = \frac{(n+s+a-1)(n+s+b-1)}{(n+s)(n+s+c-1)} d_{n-1}, \text{ com } n \geq 1. \quad (3.109)$$

Ao considerar $s = 0$, a relação de recorrência se torna (3.110) de acordo com [12].

$$d_n = \frac{(n+a-1)(n+b-1)}{n(n+c-1)} d_{n-1} \quad (3.110)$$

Resta então, expressar a relação de recorrência em função do coeficiente d_0 , logo, a função $\Gamma(x)$ é utilizada de modo que d_n seja expresso por (3.111).

$$d_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)} \frac{1}{n!} d_0 \quad (3.111)$$

Fazendo com que a solução da equação diferencial próxima a origem se dê por (3.112).

$$d_0 \left[1 + \frac{ab}{1!c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)} z^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)} z^3 + \dots \right]. \quad (3.112)$$

A série acima representa a função de Gauss, ou função hipergeométrica, e pode ser expressa em (3.113) de acordo com [12]:

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n. \quad (3.113)$$

Com a função hipergeométrica definida, pode-se então definir a função hipergeométrica Appell. Tal função é uma extensão da função hipergeométrica aplicada para duas variáveis e é dada por (3.114).

$$F_1(a; b_1, b_2; c; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b_1)_m (b_2)_m}{m! n! (c)_{m+n}} x^m y^n, \quad (3.114)$$

sendo $|x| < 1$ e $|y| < 1$.

4 RESULTADOS

Com as equações do operador integral no domínio do tempo definidas, foram realizadas simulações em região de campo próxima e distante, e, em cada caso de região, foram feitos 2 tipos de avaliações.

Num primeiro momento, são feitas variações do ângulo de elevação do observador θ , e foi observado como tal variação afeta o operador, sua amplitude, duração e formato. Essa avaliação foi realizada em [11], e, resultados com mesmo comportamento servem como validação para as novas expressões encontradas nesse trabalho.

Em seguida, é realizada uma análise do impacto da mudança do expoente n vindo das expressões do alimentador cosseno elevado modificado. Tal análise é feita fixando o ângulo de elevação do observador, θ , e alterando o expoente n para diferentes valores inteiros e positivos. Mais uma vez, é observado como tal variação afeta os aspectos do operador integral, como sua amplitude duração e formato.

Para que sejam feitas tais simulações discutidas acima, é necessário estabelecer o valor de constantes que fazem parte das equações. Considerando a velocidade da luz como $c = 3 \times 10^8$ m/s, o comprimento de onda $\lambda = 0,07$ m, frequência $f = 4.2$ GHz, e os parâmetros da antena, como o diâmetro do refletor, $D = 90\lambda = 6,3$ m e a distância focal, $F = 150\lambda = 10,5$ m. O ângulo de azimute do alimentador, bem como o ângulo de azimute do observador foram fixados, $\phi_F = \phi = 0^\circ$.

Com os parâmetros da antena, é definindo a distância $x'_0 = 50\lambda = 3,5$ m, o ângulo de *offset* é calculado:

$$\theta_0 = 2 \tan^{-1} \left(\frac{x'_0}{2F} \right) \cong 0,3303 \text{ rad} = 18,9246^\circ$$

4.1 Análise do Operador Integral na Região de Fresnel

De acordo com a seção 2, para que seja analisado o operador integral na região próxima, outro nome dado a região de Fresnel, o observador deve estar numa distância entre $0,62\sqrt{(D^3/\lambda)}$ e $(2D^2)/\lambda$ da antena. Utilizando o diâmetro e comprimento de onda especificados, define-se os limites da região próxima:

$$0,62 \sqrt{\frac{D^3}{\lambda}} = 37m < d < 1134m = \frac{2D^2}{\lambda}$$

Dado os limites de distância encontrados acima, utilizou-se $d = 50m$.

A princípio, o expoente n , vindo do alimentador cosseno elevado modificado foi fixado em 1 e foi avaliado o operador integral para as seguintes variações do ângulo de elevação de observação: 0° , 1° , 5° e 10° .

Os resultados para os parâmetros descritos acima são mostrados na Figura 4.1.

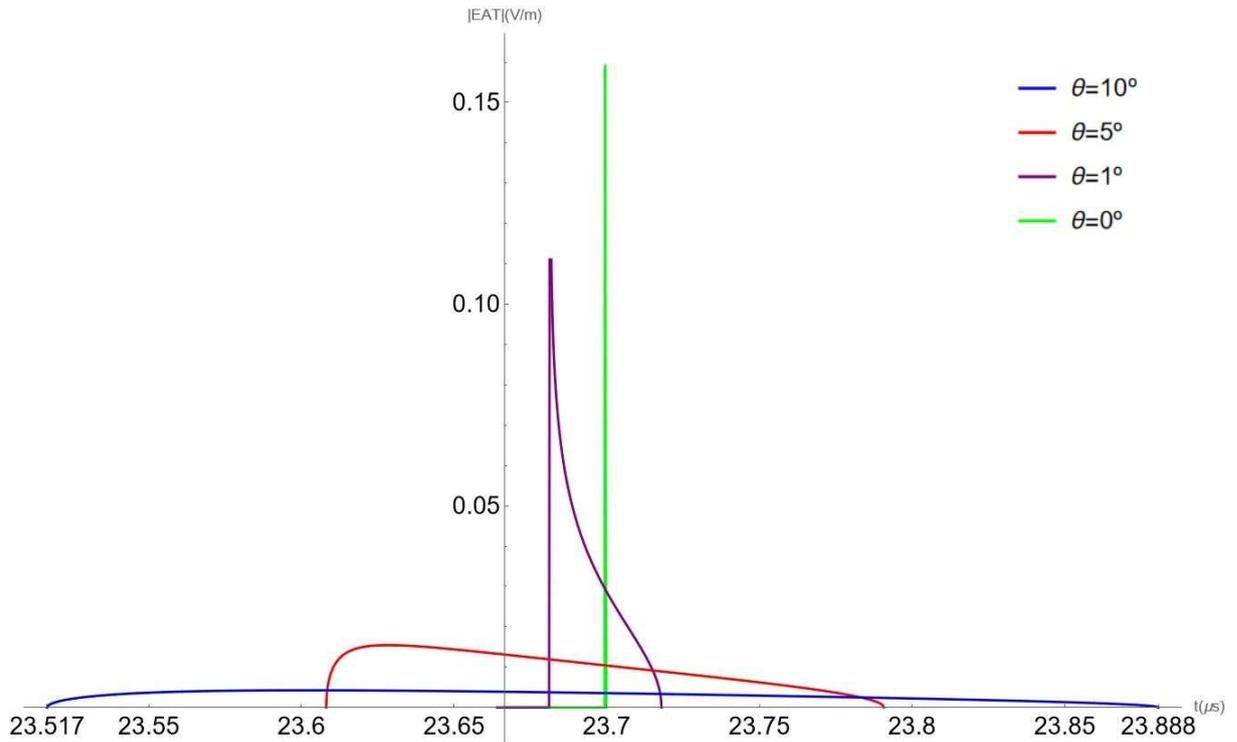


Figura 4.1 – Operador Integral no TD para $r = 50m$, e diferentes valores de θ .

Observando o comportamento do operador integral em diferentes ângulos de observação, é possível dizer que conforme o ângulo de observação cresce, a amplitude do operador integral diminui aumentando em duração, e quanto mais próximo do ângulo $\theta = 0^\circ$, maior será intensidade do operador, ou seja, o campo radiado por essa antena será mais intenso quando se observa a mesma diretamente. Em suma, a curva do operador se alarga e perde intensidade à medida que o observador sai do ângulo de máxima diretividade. Tal comportamento valida fisicamente as expressões apresentadas na seção 3.2, já que a diminuição da amplitude conforme o aumento da diretividade de uma antena é um comportamento já bastante conhecido no meio de estudo das antenas refletoras, e foi observado em outros trabalhos como [2], [3] para antenas alimentadas pelo foco, e com princípios de comportamentos similares em antenas *offset* visto em [11].

Num segundo momento, foi fixado o ângulo de elevação do observador em $\theta = 1^\circ$ e feita a variação do expoente n , presente por toda a equação do operador integral, aplicando valores de 1 a 4. Todos os outros parâmetros foram mantidos. Os resultados obtidos para a simulação são mostrados na Figura 4.2.

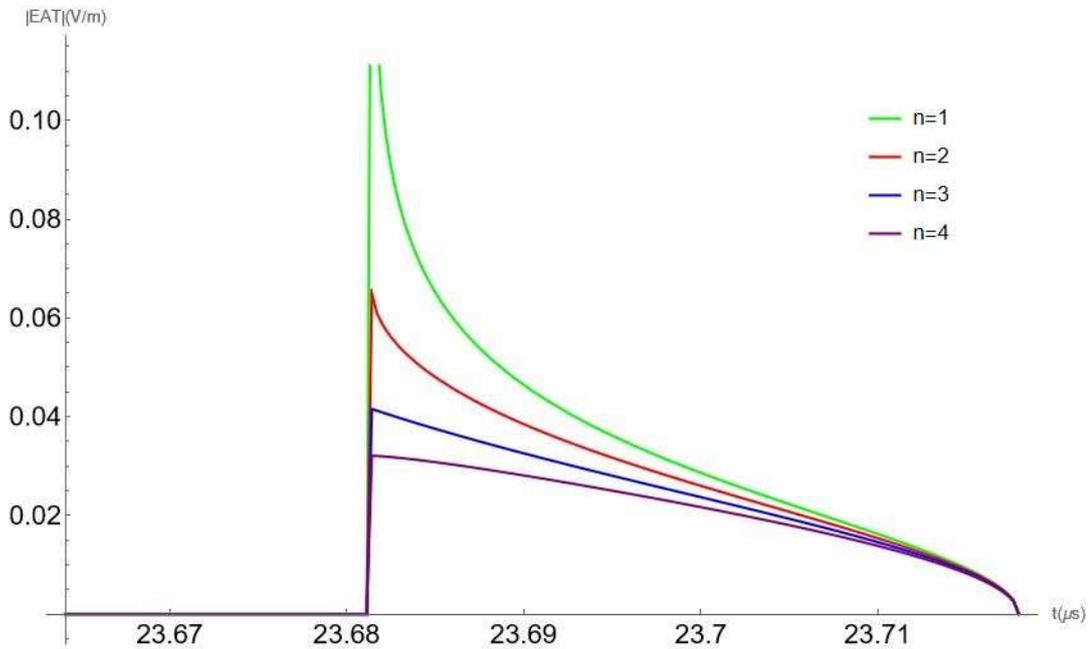


Figura 4.2 – Operador Integral no TD para $r = 50m$, e diferentes valores positivos de n .

A partir dos gráficos é possível observar que, com o aumento do expoente, a amplitude do operador integral diminui, embora sua forma e duração sejam mantidas. Como o ângulo de observação está fixado em $\theta = 1^\circ$, ou seja, próximo ao ângulo de máxima diretividade $\theta = 0^\circ$, a intensidade do operador diminui com o aumento de n . Como o expoente n está diretamente ligado com a diretividade da antena, é possível afirmar que o resultado está condizente, já que uma diretividade maior torna a amplitude do operador maior no ângulo de máxima diretividade e menor nos demais ângulos de observação.

4.2 Análise do Operador Integral na Região de Fraunhofer

De acordo com a seção 2, para que seja analisado o Operador Integral na região de Fraunhofer, ou região distante, o observador deve estar numa distância maior que $(2D^2)/\lambda$ da antena. Utilizando o diâmetro e comprimento de onda especificados, é definido a distância mínima para que a análise esteja na região distante:

$$d > 1134m = \frac{2D^2}{\lambda}$$

Para que seja garantida a análise na região desejada, utilizou-se $d = 5000m$.

A primeira simulação na região distante foi feita fixando o expoente n , vindo do alimentador cosseno elevado modificado, em 3 e foi avaliado o operador integral para as seguintes variações do ângulo de elevação de observação: 0° , 0.01° , 0.05° e 0.1° .

A primeira simulação na região distante foi feita fixando o expoente n , vindo do alimentador cosseno elevado modificado, em 3 e foi avaliado o operador integral para as seguintes variações do ângulo de elevação de observação: 0° , 0.01° , 0.05° e 0.1° .

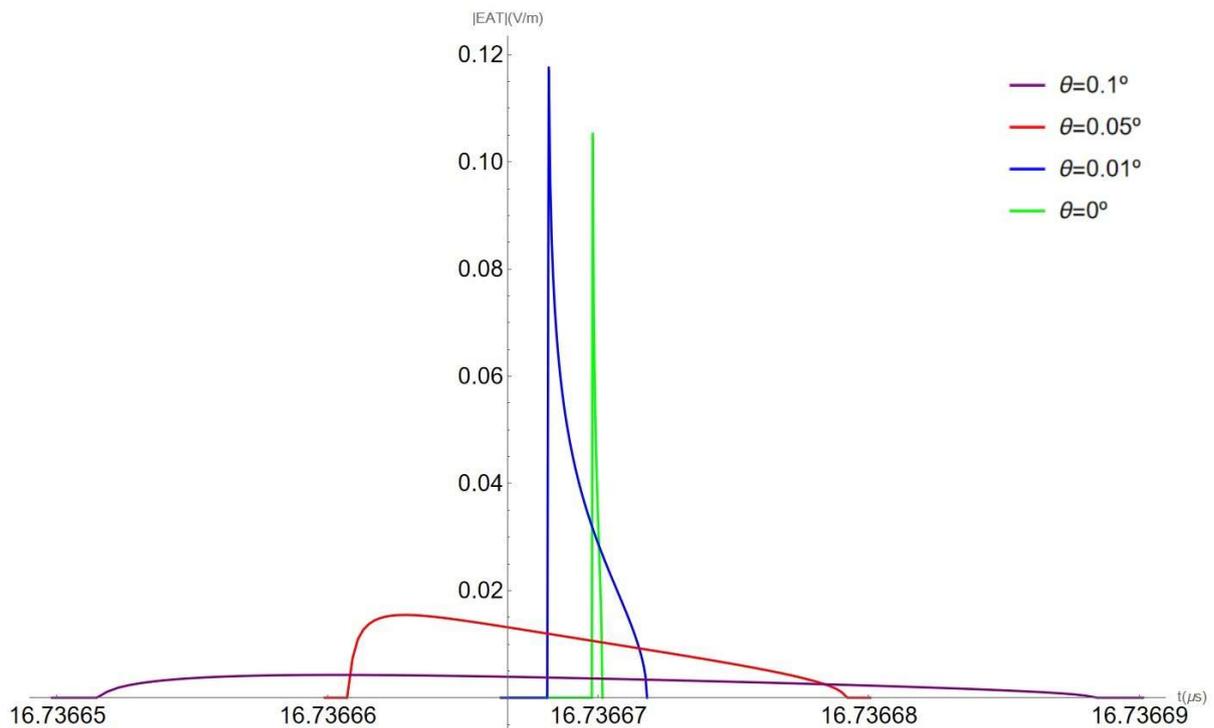


Figura 4.3 - Operador Integral no TD para $r = 5000m$, e diferentes valores de θ .

Observando o comportamento do operador integral em diferentes ângulos de observação, percebe-se o mesmo comportamento da região de Fresnel, onde, a curva do operador se alarga e perde intensidade à medida que o observador sai do ângulo de máxima diretividade, $\theta = 0^\circ$.

Embora entre os ângulos $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 0.01^\circ$ haja intensidade máxima, em ângulos maiores, a intensidade cai rapidamente com pequenas variações de ângulo. Por exemplo, uma variação de $0,04^\circ$ no ângulo de observação causa uma queda na amplitude máxima de aproximadamente $0,12 \text{ V/m}$ para $0,02 \text{ V/m}$, ou seja, uma queda de $83,3\%$.

Num segundo momento, foi fixado o ângulo de elevação do observador em $\theta = 1^\circ$ e feita a variação do expoente n , presente por toda a equação do operador integral, aplicando

valores de 1 a 4. Todos os outros parâmetros foram mantidos. Os resultados obtidos para a simulação são mostrados na Figura 4.4.

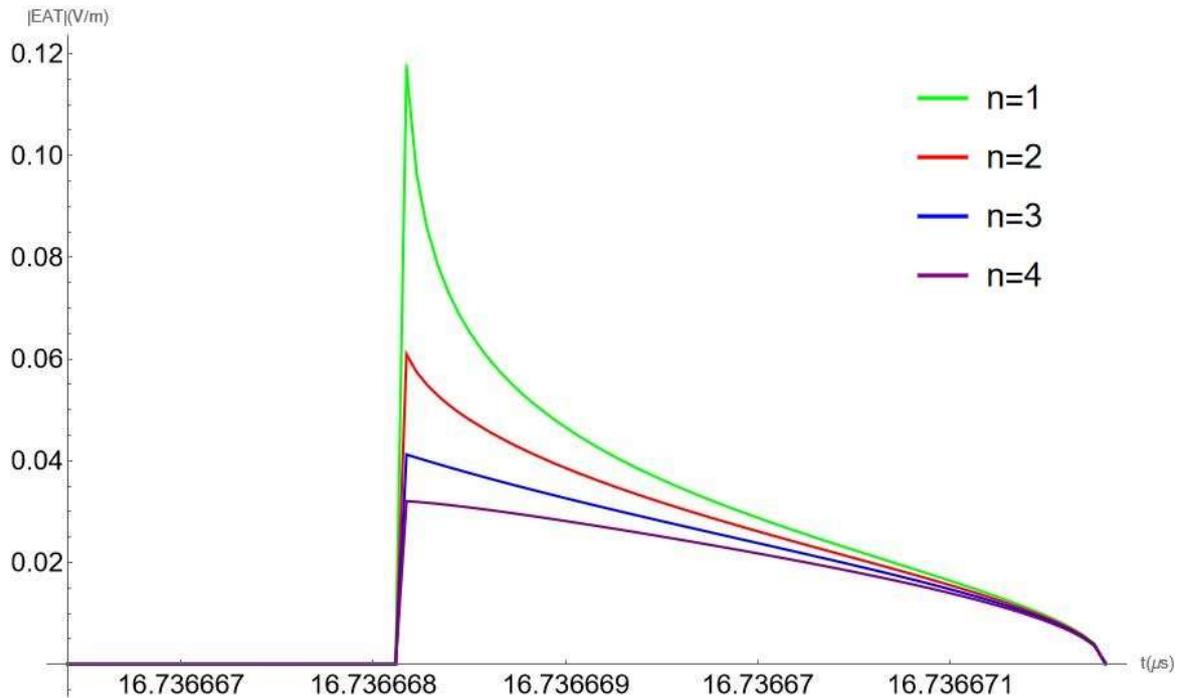


Figura 4.4 - Operador Integral no TD para $r = 5000m$, e diferentes valores de n .

Os resultados obtidos corroboram as afirmações feitas na análise na região de Fresnel. Mais uma vez, é possível observar que, no ângulo de observação fora da máxima diretividade, o aumento do expoente causa queda na amplitude do operador integral, embora sua forma e duração sejam mantidas.

O comportamento do operador integral com a variação do expoente n foi **igual** para ambas as regiões. Ou seja, a queda da amplitude com o aumento da diretividade é uma característica geral do operador, e nos campos radiados pela antena “*offset*”, tal comportamento se repetirá.

5 CONCLUSÕES

O estudo foi desenvolvido dando continuidade aos trabalhos sobre a radiação temporal das antenas refletoras, dando ênfase na configuração *offset*, onde a alimentação é feita fora do foco, eliminando bloqueios na abertura e possibilitando uma melhor diretividade e melhor cobertura em comparação com uma antena de mesma dimensão, mas com alimentação pelo foco.

As expressões desenvolvidas para o operador integral no domínio do tempo para uma antena *offset*, partindo da sua respectiva no domínio da frequência, e essa, baseada no traçado de raios da Óptica geométrica e obtenção das equações espectrais de campo pelo método da abertura, atingiram o objetivo de representar o comportamento do operador integral nas regiões de Fresnel e Fraunhofer, sendo genérica para qualquer ângulo de observação θ e para diretividades que levem ao expoente n do alimentador ser inteiro e positivo. Tal generalidade das expressões faz com que as expressões possam ser utilizadas em variados estudos que envolvam as antenas refletoras *offset*, pois conseguem abranger boa parte dos aspectos necessários para caracterizar o campo radiado dessas antenas.

A análise no domínio do tempo que foi realizada nesse trabalho, no capítulo 4, tornou possível tais afirmações acima. Foram simulações que avaliaram a variação do ângulo de elevação do observador, e num segundo momento, a variação do expoente n para as regiões de campo próxima e distante.

O comportamento do operador integral para a variação de ângulo foi condizente com o esperado, em ambas as regiões o operador cai em amplitude, aumenta sua duração e tem o pulso alargado conforme o ângulo de observação aumenta. Tal comportamento foi observado mais agressivamente na região de Fraunhofer, onde pequenas variações do ângulo geram grandes variações de amplitude. Na variação do expoente n , o seu aumento causa queda na amplitude quando observado fora da zona de máxima diretividade.

O operador integral é interpretado como a resposta temporal ao impulso da antena. É tido como um passo intermediário no cálculo dos campos radiados e por meio de uma convolução temporal entre o sinal a ser emitido pela antena e o operador integral é encontrado o campo radiado pela antena, válido para região próxima e distante. Como o operador contém as informações como a diretividade da antena, é possível avaliá-la, baseando sua performance em situações de transmissão do sinal desejado por meio da avaliação gráfica do operador.

Como visto em [3] e [11], quando $n = 2$, e exclusivamente para esse expoente, as expressões do operador integral se limitam a funções ordinárias, facilitando a utilização e implementação das expressões. No entanto, a generalização para qualquer n inteiro e positivo feita neste trabalho tornam as mesmas mais abrangentes, podendo ser utilizadas para uma gama maior de estudos.

A generalização se dá, em parte, pela utilização da função hipergeométrica Appell F_1 . Essa função especial consegue ser utilizada com certa facilidade dado o fato de que a mesma já é implementada e inclusa em softwares como o Mathematica, bastando ser chamada dentro do algoritmo do cálculo do operador integral para que seu resultado componha as equações.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] H. Chou, P. Pathak, P. Rousseau, Analytical solution for early-time transient radiation from pulse-excited parabolic reflector antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, p. 829–836, 1997.
- [2] C. Rego, Closed-form solution for integral operators applied to the calculation of radiated fields from parabolic reflector antennas. *IEEE MTT-S International Microwave & Optoelectronics Conference (IMOC)*, p. 441–446, 2009.
- [3] S. Faria, C. Rego, F. Moreira, Integral operators formulation for transient radiation from parabolic antennas using modified raised cosine feeder. *The Applied Computational Electromagnetics Society (ACES)*, 2017.
- [4] A. Rudge, A. Adatia, *Offset Parabolic-Reflector Antennas: A Review*. *Proceedings Of The IEEE*, Vol. 66, No. 12, December 1978.
- [5] S. Skulkin, V. Turchin, Transient field calculation of aperture antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, p. 929–932, 1999.
- [6] R. Oliveira, M. Helier. Closed-form expressions of the axial step and impulse responses of a parabolic reflector antenna. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, p. 1030–1037, 2007
- [7] R. Ianculescu, E. Heyman. Pulse field diffraction by a perfectly conducting wedge: a spectral theory of transients analysis, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 42, no. 6, pp. 781–789, 1994.
- [8] H. Chou, A generalized physical optic-based diffraction mechanism analysis of transient scattering from perfectly conducting surfaces. *IEEE Transactions On Antennas And Propagation*, vol. 67, No. 7, July 2019.
- [9] H. Chou, General diffraction mechanism interpretation of electromagnetic transient scattering from large scatterers by time-domain aperture integration technique. *IEEE Transactions On Antennas And Propagation*, Vol. 67, No. 10, October 2019.
- [10] C. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*. 3rd. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2005.

- [11] M. L. Gomezjurado, Caracterização Espaço-Temporal De Antenas Refletoras Tipo *Offset*, Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais, 2021.
- [12] E. Oliveira, Funções Especiais com Aplicações . [S.l.]: Livraria da Física, 2005.
- [13] S. Skulkin, et al. Transient field calculation of aperture antennas for various field distributions over the aperture. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, p. 2295–2298, 2017.
- [14] C. Baum. Focused aperture antennas. Air Force Weapons Laboratory, 1987.
- [15] A. Ludwig. The definition of cross polarization. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, p. 116–119, 1973.
- [16] A. Rich, D. Jeffrey. A knowledge repository for indefinite integration based on transformation rules. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.