

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
ASSOCIAÇÃO AMPLA ENTRE CEFET-MG E UFSJ

Larissa Soares Figueiredo

CONTROLE DE SISTEMAS LPV DISCRETOS NO TEMPO SUJEITOS A
ATUADORES SATURANTES.

Belo Horizonte
2020

Larissa Soares Figueiredo

CONTROLE DE SISTEMAS LPV DISCRETOS NO TEMPO SUJEITOS A
ATUADORES SATURANTES.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEL) do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Valter J. S. Leite

Coorientador: Prof. Dr. Márcio Júnior Lacerda

Belo Horizonte
2020

(Catalogação - Biblioteca Universitária – Campus Divinópolis – CEFET-MG)

F475c Figueiredo, Larissa Soares.
Controle de sistemas LPV discretos no tempo sujeitos a atuadores saturantes. / Larissa Soares Figueiredo. – Divinópolis, 2020.
96 f. ; il.

Orientador: Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite.
Coorientador: Prof. Dr. Márcio Júnior Lacerda.

Área de Concentração: Modelagem e Controle de Sistemas.
Linha de Pesquisa: Sistema de Controle.
Dissertação (Mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais/Universidade Federal de São João del-Rei. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

1. Modelagem. 2. Controle de Sistemas. 3. Sistemas LPV. 4. Atuadores Saturantes. 5. Função de Lyapunov. 6. Região de Atração. I. Leite, Valter Júnior de Souza. II. Lacerda, Márcio Júnior. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Universidade Federal de São João del-Rei. V. Título.

CDU: 004.75: 004.414.23

Larissa Soares Figueiredo

CONTROLE DE SISTEMAS LPV DISCRETOS NO TEMPO SUJEITOS A
ATUADORES SATURANTES.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEL) do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Comissão Avaliadora:

Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite
CEFET-MG

Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari
UTFPR

Prof. Dr. Márcio Júnior Lacerda
UFSJ

Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves
CEFET-MG

Belo Horizonte
2020

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
ASSOCIAÇÃO AMPLA ENTRE CEFET-MG E UFSJ

Dissertação intitulada “*Controle de sistemas LPV discretos no tempo sujeitos a atuadores saturantes*”, de autoria da aluna Larissa Soares Figueiredo, aprovada pela banca examinadora constituída pelos seguintes professores:

Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite
CEFET-MG / *Campus* Divinópolis - PPGEL CEFET-MG / UFSJ

Prof. Dr. Márcio Júnior Lacerda
Universidade Federal de São João Del-Rei - PPGEL CEFET-MG / UFSJ

Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Eduardo Nunes Golçalves
CEFET-MG / *Campus* Belo Horizonte - PPGEL CEFET-MG / UFSJ

DEDICO ESTE TRABALHO À MINHA
FAMÍLIA QUE, COM MUITO CARI-
NHO E APOIO, NÃO MEDIRAM ES-
FORÇOS PARA QUE EU CHEGASSE
ATÉ ESTA ETAPA DE MINHA VIDA.

Agradecimentos

Agradeço,

a Deus, por ter me abençoado e me dado forças para vencer.

Aos meus pais, que sempre me apoiaram e lutaram para que meus sonhos se realizassem. Não posso esquecer de agradecer à minha mãe também por escutar meus choros na hora do desespero.

Aos meus irmãos pela torcida e apoio mesmo distantes e a todos meus familiares, em especial minhas avós Faride e Selma pelas orações.

Ao Letivan, também por me escutar em momentos de desespero e pelo carinho e apoio durante o curso de mestrado.

A todos do laboratório de Sinais e Sistemas, pela ajuda, compartilhamento de informações e também pela convivência diária. Em especial à Flávia, Mariella e à Michelle, que além de companheiras de mestrado tornaram-se amigas. Ao Álan que sempre estava disposto a ajudar. Ao meu estagiário Társis, pela parceria e amizade. Ao Lucas, Gabriel e Anderson pelo apoio e companheirismo.

A todos os colegas do departamento, pelos momentos de descontração, em especial ao Adriano que me ajudou muito no início do mestrado e ao Lucas e o Luís por sempre estarem dispostos a ajudar.

Ao meu co-orientador Márcio, que apesar de estar longe nunca mediu esforços para ajudar.

Ao meu orientador Valter, que com certeza é a pessoa que mais devo agradecer por ter conseguido chegar aqui. Primeiro pela confiança depositada em mim logo no início, depois por toda sua paciência, bondade, companheirismo, ensinamentos. E por fim, agradeço também pela amizade que construímos ao longo do curso.

Enfim, agradeço a todos que de alguma maneira contribuíram para a concretização desse trabalho.

Para superar os obstáculos a melhor estratégia é a
atitude.

Autor desconhecido

Resumo

Este trabalho investiga o problema da estabilização local para sistemas discretos no tempo com parâmetros variantes no tempo, LPV (do inglês, *Linear Parameter Varying*), e sujeitos a atuadores saturantes. A função saturação é representada como uma não-linearidade do tipo zona-morta, possibilitando a aplicação da condição generalizada de setor. Devido à limitação no sinal de controle é necessário caracterizar uma região, na qual qualquer trajetória dos estados iniciadas dentro desta região convirjam para a origem. Dessa forma, são propostas condições convexas para projetar controladores por realimentação de estados que estabilizam localmente o sistema em malha fechada para um conjunto de condições iniciais admissíveis. As primeiras condições apresentadas baseiam-se em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros polinomiais homogêneas, HPPD (do inglês, *Homogeneous Polynomially Parameter-Dependent*). Graças a um conjunto de níveis definido a partir de uma função Lyapunov, obtém-se estimativas menos conservadoras da região de atração. Os ganhos do controlador podem assumir estruturas racionais nos parâmetros variantes no tempo, produzindo melhores estimativas da região de atração, bem como um amplo conjunto de sistemas estabilizáveis. As demais condições apresentadas neste trabalho são baseadas em funções poliquadráticas, que é um caso particular das funções polinomiais homogêneas. São apresentados exemplos numéricos para demonstrar a eficácia dos métodos propostos. A primeira condição baseada em funções poliquadráticas permite considerar a dependência paramétrica na matriz de entrada do modelo do sistema. A segunda condição garante uma taxa mínima de contratividade da função de Lyapunov por meio do índice de desempenho adotado que é o λ -contratividade. Uma estrutura integral proporcional é empregada para garantir erro de rastreamento nulo para sinais de referência constantes por partes. Portanto, esta proposta se encaixa nos requisitos de projeto dos sistemas reais LPV e *quasi*-LPV. Ensaio experimentais conduzidos em um controle de nível não-linear de segunda ordem ilustram o potencial da abordagem proposta. Além disso, os testes indicam como a taxa de contratividade afeta o tamanho da estimativa região de atração.

Palavras-chave: Sistemas LPV. Atuadores saturantes. Funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. Região de atração.

Abstract

This paper investigates the problem of local stabilization for discrete time systems with time varying parameters, LPV (Linear Parameter Varying), and subject to saturating actuators. The saturation function is represented as a dead zone nonlinearity, implying the application of the generalized sector condition. Due to the limitation in the control signal it is necessary to characterize an estimate region of attraction in which any trajectory of states beginning within this region converge to the origin. Thus, convex conditions are proposed to design state feedback controllers that locally stabilize the closed loop system for a set of allowable initial conditions. The first conditions presented are based on Homogeneous Polynomially Parameters-Dependent (HPPD) Lyapunov functions. Thanks to a set of levels defined from an Lyapunov function, less conservative estimates of the region of attraction are obtained. Controller gains can assume rational structures in time-varying parameters, producing better estimates of the region of attraction as well as a broad set of stabilizable systems. The others conditions presented in this paper are based on polyquadratic functions, which is a particular case of homogeneous polynomial functions. Numerical examples are presented to demonstrate the effectiveness of the proposed methods. The first condition based on polyquadratic functions which allows to take into account the parametric dependency in the system model input matrix. The second condition guarantees a minimum contractility rate of the Lyapunov function through the adopted performance index which is λ -contractivity. A proportional integral structure is employed to ensure null tracking error for piecewise constant reference signals. Therefore, this proposal fits the design requirements of real LPV and quasi-LPV systems under saturating actuators. Experimental trials conducted on a second order nonlinear level control illustrate the potential of the proposed approach. In addition, tests indicate how the contractility rate affects the size of the estimated region of attraction.

Key-words: LPV systems. Saturating actuators. Parameter-dependent Lyapunov Functions. Region of attraction.

Sumário

Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Acrônimos e Notação	xiv
1 Introdução geral	1
1.1 Sistemas LPV saturantes	2
1.1.1 Representação de sistemas LPV	2
1.1.2 Efeitos da saturação	3
1.2 Revisão bibliográfica	8
1.3 Objetivos	12
1.4 Organização do texto	13
2 Fundamentos	15
2.1 Sistemas LPV	15
2.2 Estabilização de sistemas com saturação	18
2.3 Estabilidade no sentido de Lyapunov	21
2.4 Polinômios positivos	24
2.4.1 Funções polinomiais homogêneas	25
2.5 Considerações finais	27
3 Controladores racionais para sistemas LPV sob saturação	28
3.1 Preliminares	29
3.1.1 Candidata a função de Lyapunov HPPD	30
3.1.2 Conjunto de nível	30
3.2 Estabilização via estabilidade poliquadrática	32
3.3 Abordagem direta	35
3.4 Complexidade numérica	36
3.5 Procedimento de otimização	37
3.6 Exemplos numéricos	38
3.6.1 Exemplo 1	38
3.6.2 Exemplo 2	41
3.7 Considerações finais	44

4	Abordagem poliquadrática	45
4.1	Condições para estabilização	47
4.1.1	Procedimento de otimização	51
4.1.2	Exemplos numéricos	51
4.1.3	Considerações finais	55
4.2	Seguimento de referência	55
4.3	Estudo de caso	60
4.3.1	Configuração experimental	60
4.3.2	Modelagem física	61
4.3.3	Resultados experimentais	66
4.4	Considerações finais	70
5	Conclusões	72
5.1	Considerações finais	72
5.2	Trabalhos desenvolvidos	74
5.3	Trabalhos futuros	76
A	Complemento de Schur	77
	Referências	78

Lista de Figuras

1.1	Trajétoria dos estados do sistema sem saturação (1.7).	5
1.2	Sinal de controle e ganhos do controlador.	5
1.3	Valores de α_k .	5
1.4	Trajétoria dos estados do sistema com saturação (1.13).	6
1.5	Trajétórias dos estados dos sistemas (1.7) e (1.13).	7
1.6	Sinal de controle e ganhos do controlador.	7
2.1	Função Saturação.	19
2.2	Função Zona Morta.	20
3.1	Estimativas regiões de atração.	40
3.2	α_k (parte superior) e ganhos $k_{1,k}$ e $k_{2,k}$ (inferior).	41
3.3	Sinais de controle.	42
3.4	Comparação de ω pelo volume das condições 3.1 e 3.2.	44
4.1	\mathcal{L}_V e a trajetória das condições iniciais para o Exemplo 1.	52
4.2	Sinal de controle para o Exemplo 1.	53
4.3	α_k (superior) e ganhos $K_{1,k}$ e $K_{2,k}$ (inferior).	54
4.4	Região de atração para o Exemplo 2 com $\gamma = 0,5$.	54
4.5	Topologia do controlador LPV com ação integral.	56
4.6	Sistema de tanques acoplados.	61
4.7	Esquemático do sistema de tanques.	62
4.8	Sólido contido no TQ-01.	62
4.9	Curva de regressão da vazão de entrada.	63
4.10	Curva de regressão da vazão de saída.	63
4.11	Validação de $h_1(t)$ para 0,28 m.	65
4.12	Validação de $h_1(t)$ para 0,38 m.	65
4.13	Validação de $h_1(t)$ para 0,48 m.	65
4.14	Comportamento dos termos das matrizes de estados.	65
4.15	Nível do tanque TQ-01.	67
4.16	Sinais de controle.	68
4.17	Comportamento dos ganhos de controle em variação do tempo.	68
4.18	Nível do tanque TQ-01 sob perturbação.	69
4.19	Sinais de controle	70
4.20	\mathcal{R}_E para $\rho = 15\%$.	70
4.21	\mathcal{R}_E para $\rho = 25\%$.	71

Lista de Tabelas

3.1	Valores de ω obtidos com as condições propostas nos teoremas 3.1 e 3.2.	43
4.1	Valores de $\gamma > 0$ para a estabilização do Sistema 4.29.	52

Lista de Acrônimos e Notação

LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> (Desigualdade Matricial Linear).
LPV	<i>Linear Parameter-Varying</i> (Variação de Parâmetro Linear).
LFT	<i>Linear Fractional Transformation</i> (Transformação Fracional Linear).
*	denota os elementos simétricos em relação à diagonal nas LMIs.
M^T	transposta da matriz M .
$\text{He}(M)$	denota $M + M^T$ para qualquer matriz quadrada M .
\mathbb{R}	conjunto dos números reais.
\mathbb{R}^n	conjunto dos vetores de dimensões n com elementos reais.
$\mathbb{R}^{n \times m}$	conjunto das matrizes de dimensões $n \times m$ com elementos reais.
I_n	representa a matriz identidade de dimensão n .
0_n	representa a matriz nula de dimensão n .
$\text{diag}(A,B)$	denota uma matriz bloco diagonal $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ para matrizes A e B .
\mathcal{R}_A	representa a região de atração.
\mathcal{R}_ε	representa a estimativa da região de atração.
\mathbb{Z}^+	representa o conjunto dos números inteiros não negativos.
N	representa o número de vértices do sistema.
$A \subseteq B$	indica que A está contido em B .
$[a,b]$	representa o intervalo dos números inteiros de a até b , com $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ e $a < b$.

Introdução geral

Neste trabalho são desenvolvidas condições convexas de síntese de controladores por realimentação de estados para sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo (LPV do inglês, *Linear Parameter Varying*) sujeitos a atuadores saturantes. Devido a essa não-linearidade na entrada do sistema, a estabilidade assintótica global é, em geral, quase impossível. Assim a análise de estabilidade para um sistema LPV com atuadores saturantes precisa ser feita via estabilidade local, isto é, para uma vizinhança limitada em torno do ponto de equilíbrio. Portanto, o objetivo do projeto de controlador é garantir a estabilização local do sistema LPV sob saturação de atuadores, para isso é necessário a estimação de uma região no espaço de estados tal que toda trajetória iniciando nessa região convirja para o ponto de equilíbrio.

Os processos físicos estão sujeitos a diferentes tipos de não-linearidades, tais como saturação dos estados, atritos, folgas, histerese, saturação da taxa de variação de um atuador, entre outras. No entanto, o foco no desenvolvimento apresentado na sequência é sobre a saturação de amplitude dos atuadores. Essa escolha deve-se ao fato de que essa não-linearidade de amplitude costuma ser a mais comum relacionada aos atuadores em processos industriais. Como é o caso, por exemplo, dos conversores de potência e amplificadores, que possuem correntes e tensões de saída limitadas a fim de evitar danos aos componentes.

Neste capítulo, primeiramente, é ilustrado o problema de estabilidade que pode advir da inclusão de saturação nos atuadores do sistema. Esse é o principal problema a ser tratado nesta dissertação. A ideia é dar ao leitor uma visão geral do problema investigado, com o mínimo de formalismo. Nos capítulos seguintes a formalização das ideias aqui introduzidas será feita de forma mais detalhada. Posteriormente, são suscitados alguns aspectos que também são tratados na dissertação, bem como um estudo da literatura para cada caso. E, por fim, são apresentados os objetivos principais com este trabalho e a organização textual, com base em cada capítulo.

1.1 Sistemas LPV saturantes

O objetivo desta seção é mostrar para o leitor quais são os problemas advindos com a saturação no sinal de controle de um sistema LPV. Para isso, é realizada uma breve explicação sobre sistemas LPV, bem como algumas representações possíveis.

1.1.1 Representação de sistemas LPV

Os sistemas lineares com parâmetros variantes (LPV) são sistemas dinâmicos cuja descrição matemática depende de parâmetros que alteram valores ao longo do tempo (Briat, 2015). Existem várias representações possíveis para um sistema LPV, sendo algumas apresentadas a seguir.

Sistemas LPV na forma LFT: Os sistemas LPV na forma de transformação fracional linear (LFT) são sistemas LPV expressos como interconexões de dois subsistemas. Esse procedimento é frequente em análises e controles robustos. A ideia principal dessa forma de representação do sistema LPV é em reescrever um sistema complexo como uma interconexão de uma parte simples e uma parte complicada, isto é, em uma parte que possui linearidade, invariância no tempo e outra com não-linearidades, dinâmica de dimensões finitas e variância no tempo (Briat, 2015). Os sistemas LPV na forma LFT são representados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \\z_k &= Cx_k, \\w_k &= \theta(\alpha_k)z_k,\end{aligned}\tag{1.1}$$

em que w_k e z_k são sinais que descrevem a interconexão com a parte dependente do parâmetro $\theta(\alpha_k)$, x_k é o vetor de estados do sistema, u_k é o sinal de controle e α_k é o parâmetro variante no tempo.

Sistemas LPV na forma de entrada/saída: Essa forma de representação é a menos difundida. É utilizada para identificação e projeto de controle. Os sistemas LPV na forma de entrada/saída são representados como:

$$D(\sigma, \rho)y = N(\sigma, \rho)u,\tag{1.2}$$

em que u é a entrada do sistema e y a saída. O σ é o operador avanço que para o caso discreto no tempo é descrito da seguinte forma:

$$\sigma(y(k)) = y(k+1).\tag{1.3}$$

Os polinômios N e D são polinômios em σ (operador) e em ρ (parâmetros variantes no tempo).

Sistemas LPV na forma politópica: A estrutura politópica é uma maneira de representar e analisar sistemas LPV. Os sistemas politópicos são explicitamente representados como uma combinação convexa de sistemas lineares com variação temporal. Essa propriedade estrutural pode ser explorada para obter resultados de estabilidade e estabilização que podem ser facilmente verificáveis usando técnicas de otimização convexas, como é o caso das LMIs. Devido a esse fato, neste trabalho, a análise de estabilidade e o projeto de controlador são realizados em sistemas LPV na forma politópica, que são representados da seguinte forma para um sistema discreto no tempo:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(\alpha_k)x_k + B(\alpha_k)u_k, \\ z_k &= C(\alpha_k)x_k, \end{aligned} \quad (1.4)$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de sinais de controle, $z_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ é o vetor de saídas do sistema e as matrizes $A(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ e $C(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$, pertencem ao politopo dado pela combinação convexa de N vértices conhecidos:

$$A(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} A_i, \quad B(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} B_i, \quad C(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} C_i, \quad (1.5)$$

sendo $\alpha_k \in \Lambda$ o vetor dos parâmetros variantes no tempo em que Λ é o simplex unitário:

$$\Lambda = \left\{ \alpha_k \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} = 1, \quad \alpha_{k,i} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \right\}. \quad (1.6)$$

Note que na representação (1.4) ainda pode ser considerada o efeito de uma perturbação aditiva $w_k \in \mathbb{R}^{n_w}$. Esse aspecto será considerado nos próximos capítulos.

1.1.2 Efeitos da saturação

A saturação nos atuadores pode causar efeitos indesejados no sistema, como ciclos limites, pontos de equilíbrio parasitas e até mesmo levar o sistema à instabilidade. Vários livros trazem estudos específicos sobre o problema de saturação, como em (Tarbouriech *et al.*, 2011; Corradini *et al.*, 2012; Yang *et al.*, 2019), que evidenciam a relevância desse tema tanto do ponto de vista acadêmico quanto de aplicações em processos econômicos que exigem maior desempenho e eficiência. Portanto, para ilustrar esses efeitos no sistema, primeiramente é realizado o projeto de um controlador para um sistema LPV sem a limitação de entrada e, posteriormente, o mesmo controlador projetado será utilizado em um sistema LPV sujeito a atuadores saturantes.

Exemplo 1.1 *Considere o sistema LPV discreto no tempo:*

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + B(\alpha_k)u_k, \quad (1.7)$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de sinais de controle e as matrizes $A(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ pertencem ao politopo dado pela combinação convexa de N vértices conhecidos dado em (1.5) e $\alpha_k \in \Lambda$.

As matrizes A e B dos vértices são dadas por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0,45 & -0,45 \\ -1,80 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1,35 & 1,35 \\ -0,90 & 0,45 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

O vetor de parâmetros variantes no tempo, $\alpha(k)$, está disponível em tempo real permitindo o uso da lei de controle

$$u_k = K(\alpha_k)x_k, \quad (1.9)$$

em que $K(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$,

$$K(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} K_i, \quad (1.10)$$

e os valores de $K_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ devem ser determinados. Esse controlador deve garantir a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada,

$$x_{k+1} = \left(A(\alpha_k) + B(\alpha_k)K(\alpha_k) \right) x_k. \quad (1.11)$$

Para a realização da síntese é utilizada uma função de Lyapunov dependente de parâmetro variante no tempo, $x_k^T P(\alpha_k)x_k$, e a técnica proposta em (Daafouz & Bernussou, 2001). Assim, os valores de K_i determinados para o sistema (1.7) com matrizes dadas em (1.8) são:

$$K_1 = [0,8838 \quad 0,2698] \quad K_2 = [-0,5912 \quad -0,8820]. \quad (1.12)$$

Escolhendo uma condição inicial igual a $x_0 = [-0,16 \quad -2,77]$ é traçado o gráfico das trajetórias dos estados do sistema, como pode observar na Figura 1.1. Percebe-se que as trajetórias convergem para a origem, como esperado, concluindo que o controlador projetado garante a estabilidade do sistema (1.7) para essa condição inicial específica.

O sinal de controle para essa trajetória é mostrado na Figura 1.2 parte superior, e na parte inferior da Figura 1.2 são mostrados os ganhos de $K(\alpha_k)$ para a condição inicial x_0 dada. A variação dos parâmetros pode ser visualizada na Figura 1.3.

Desta vez, considere o seguinte sistema LPV discreto no tempo com atuadores saturantes,

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + B(\alpha_k)\text{sat}(u_k), \quad (1.13)$$

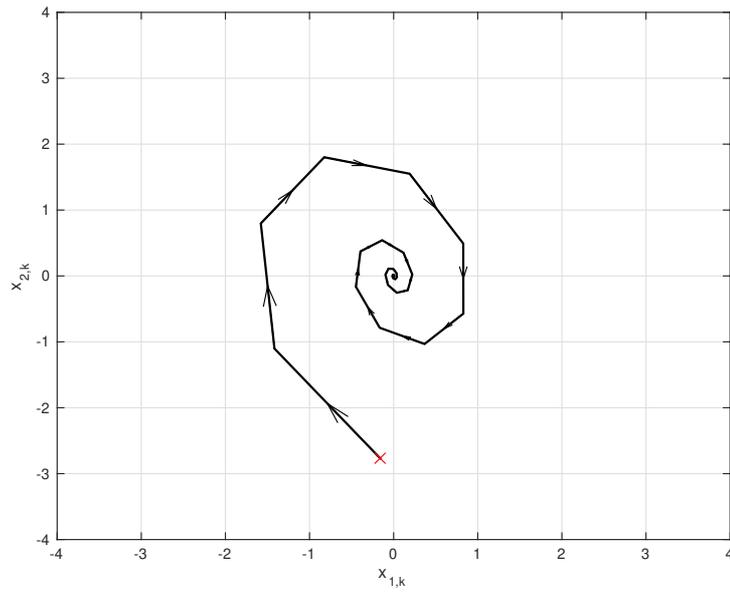


Figura 1.1: Trajetória dos estados do sistema sem saturação (1.7).

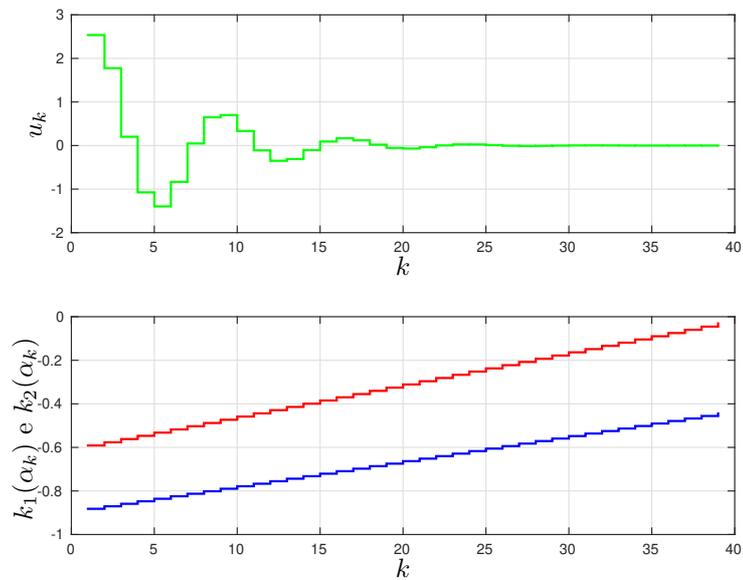


Figura 1.2: Sinal de controle (parte superior) e ganhos $K(\alpha_k)$ na parte inferior para $x_0 = [-0,16 \quad -2,77]$.

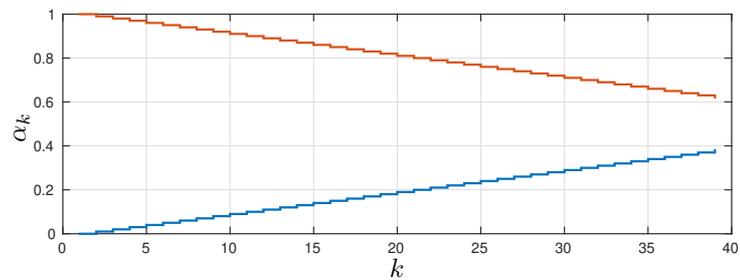


Figura 1.3: Valores de α_k .

em que as matrizes $A(\alpha_k)$ e $B(\alpha_k)$ pertencem ao politopo dado em (1.5) e apresentam os mesmo valores que em (1.8). Percebe-se que agora a entrada u_k apresenta uma limitação

em amplitude, considerando o limite da amplitude equivalente a 1, tem-se,

$$-1 \leq \text{sat}(u_k) \leq 1,$$

em que neste caso, a saturação pode ser expressa como

$$\text{sat}(u_k) = \text{sign}(u_k) \min\{|u_k|, 1\}.$$

Para tratar o termo $\text{sat}(u_k)$ então, define-se a função zona morta, $\Psi(u_k)$, que pertence a uma condição de setor:

$$\Psi(u_k) = u_k - \text{sat}(u_k), \quad (1.14)$$

Usando (1.14) tem-se que $\text{sat}(u_k) = u_k - \Psi(u_k)$, que substituindo em (1.13) resulta em

$$x_{k+1} = \left(A(\alpha_k) + B(\alpha_k)K(\alpha_k) \right) x_k - B(\alpha_k)\Psi\left(K(\alpha_k)x_k \right). \quad (1.15)$$

A Figura 1.4 mostra as trajetórias dos estados do sistema (1.13) para a mesma condição inicial x_0 , isto é, $x_0 = [-0,16 \quad -2,77]$ e considerando a mesma variação dos parâmetros α_k dados na Figura 1.3.

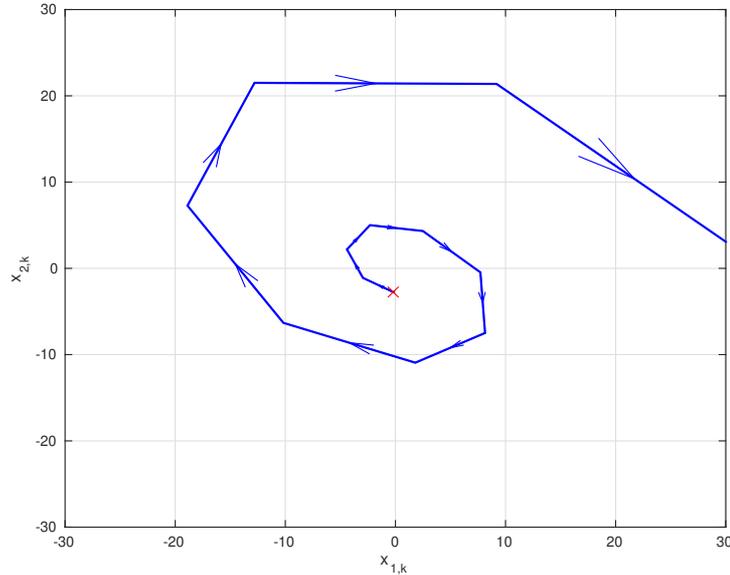


Figura 1.4: Trajetória dos estados do sistema com saturação (1.13).

Com a finalidade de facilitar a visualização do leitor, a Figura 1.5 é apresentada as trajetórias dos estados do sistema (1.7) e as do sistema (1.13). Portanto, é possível analisar que quando se inclui a limitação de amplitude no sinal de controle, o controlador projetado (1.12) não consegue garantir a estabilidade assintótica do sistema (1.13). Percebe-se que esse sistema ficou instável, sendo um dos grandes problemas que a saturação gera nos sistemas.

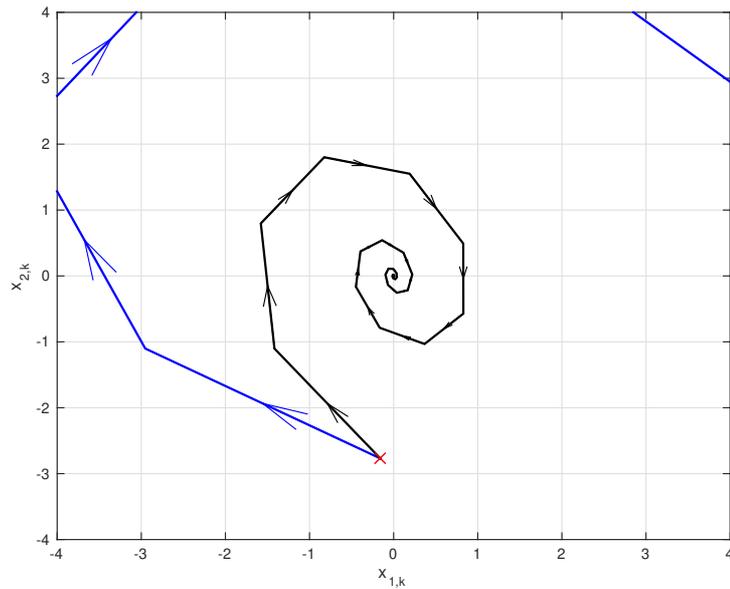


Figura 1.5: Trajetória dos estados do sistema sem saturação (1.7) (curva preta) e do sistema com saturação (1.13) (curva azul).

O sinal de controle da trajetória dos estados do sistema (1.13) pode ser visualizado na parte superior da Figura 1.6, onde é possível notar a insuficiência de esforço de controle para levar a trajetória para a origem, e os ganhos projetados, que são os mesmos da Figura 1.2, na parte inferior da Figura 1.6.

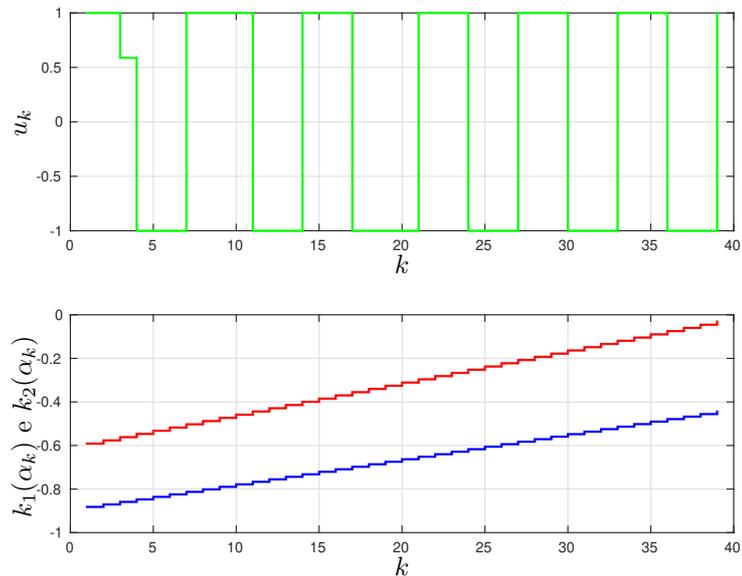


Figura 1.6: Sinal de controle (parte superior) e ganhos $K(\alpha_k)$ na parte inferior para $x_0 = [-0,16 \quad -2,77]$.

Portanto, quando o sistema está sujeito a atuadores saturantes, é necessário a caracterização de uma região em torno no ponto de equilíbrio (no caso a origem) tal que toda trajetória ali iniciada converge para o ponto de equilíbrio, isto é, o controlador projetado consegue garantir a estabilidade local (visto que não são para todas condições iniciais)

do sistema. Essa região é denominada de região de atração (\mathcal{R}_A), porém determiná-la não é uma tarefa fácil. Assim, em geral é realizada uma estimativa dessa região, que denominamos (\mathcal{R}_ε). Note que $\mathcal{R}_\varepsilon \subseteq \mathcal{R}_A$.

O principal problema desta dissertação, portanto, é descrito a seguir.

Problema 1.1 *Dado um sistema LPV, discreto no tempo, com atuadores saturantes como no sistema representado em (1.13), projetar um controlador dependente de parâmetros, que considere a saturação e assegure a estabilização local da malha fechada (1.15) para um determinado conjunto de condições iniciais.*

1.2 Revisão bibliográfica

Em processos reais é comum encontrar modelos com dinâmica não linear. Estas não-linearidades tornam os sistemas mais complexos, o que dificulta a análise, visto que descrevê-los analiticamente é praticamente impossível e as ferramentas existentes para tratar a estabilidade e a estabilização destes não são implementadas facilmente. Já em sistemas lineares existem várias ferramentas mais acessíveis para analisar a estabilidade dos sistemas, bem como projetar um controlador posteriormente. Assim, para facilitar a manipulação dos sistemas não lineares utilizam-se técnicas a fim de linearizá-los, como a linearização em torno de um ponto de equilíbrio, em torno de uma trajetória, linearização por realimentação, entre outras. Porém, essas técnicas não são muito confiáveis, pois se tratam apenas de uma aproximação do sistema. É neste caso que a representação do sistema não linear em um sistema linear com parâmetros variantes no tempo torna-se uma ferramenta interessante, pois possibilita a descrição do modelo não linear em regiões de abrangência maior, formando um domínio de operação para o sistema.

Sistemas LPV são sistemas dinâmicos lineares com dimensões finitas, cujos parâmetros variantes no tempo são mensuráveis e podem ser agrupados em um vetor. Esse vetor modifica o comportamento dinâmico do sistema podendo afetar tanto o desempenho quanto a estabilidade (Briat, 2015; Sename *et al.*, 2013). Há um interesse crescente por essa estrutura de modelagem e identificação em diversas áreas como, por exemplo: aeronáutica (Lee *et al.*, 2001; Lu *et al.*, 2006), automotiva (Fialho & Balas, 2000; Hingwe *et al.*, 2002; Onat *et al.*, 2007), mecânica (Giarré *et al.*, 2006), mecatrônica (Steinbuch *et al.*, 2003), entre outras.

A teoria de Lyapunov é uma das ferramentas mais populares empregadas para lidar com sistemas LPV. Em geral, essa teoria utiliza uma relação matemática que pode ser vista como uma função generalizada de energia do sistema. Se a função energia do sistema é sempre positiva e decrescente com relação ao tempo, as trajetórias do sistema

tendem à origem (Briat, 2015). Uma vantagem significativa está relacionada ao fato de que a abordagem de Lyapunov geralmente permite a formulação de condições de análise e projeto de controle na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*), que podem ser tratadas eficientemente por algoritmos especializados baseados em otimização convexa (Boyd *et al.*, 1994).

Na literatura encontra-se diversos trabalhos que representam um processo não linear como um sistema LPV, sendo citados alguns destes a seguir. Em (Geromel & Colaneri, 2006) são estudadas condições globais de estabilidade assintótica para sistemas politópicos, de tempo contínuo, variantes no tempo, usando uma função de Lyapunov dependente de parâmetros, com a finalidade de obter resultados menos conservadores. Os parâmetros variantes no tempo, bem como a sua derivada temporal, são modelados como pertencentes a conjuntos convexos politópicos. Em (Chesi *et al.*, 2007) é tratada a análise de estabilidade robusta de sistemas lineares afetados por incertezas variantes no tempo com taxa de variação limitada. Nesse artigo, foi introduzida uma nova classe de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, cuja característica principal é que a dependência dos parâmetros e as variáveis de estado são expressas como formas polinomiais homogêneas. O principal resultado do artigo foi a obtenção de uma condição suficiente para determinar a função desejada de Lyapunov, que equivale a resolver um problema de factibilidade de LMIs, derivado de uma parametrização adequada de formas polinomiais homogêneas. Nesta dissertação o principal resultado obtido é utilizando também esse tipo de função de Lyapunov, visto que é formulada de forma mais geral, isto é, menos conservadora. Em (Pandey & De Oliveira, 2018) é introduzido uma nova condição para a estabilização de sistemas LPV de tempo discreto na forma de LMIs. Uma característica das condições propostas nesse trabalho é a capacidade de lidar com variações tanto na matriz dinâmica como na matriz de entradas sem recorrer a procedimentos dinâmicos de aumento ou iterativo. Essa nova condição apresenta o resultado de estabilização poliquadrática, que é introduzida por Daafouz & Bernussou (2001). Uma das condições apresentadas neste trabalho é baseada nesse trabalho realizado por Pandey & De Oliveira (2018). Em (Bertolin *et al.*, 2018) é revisado o problema de análise de estabilidade de sistemas com parâmetros variantes no tempo arbitrariamente rápidos, para o caso discreto no tempo, o que inclui a classe de sistemas lineares chaveados com comutação arbitrária discutido em (Gomide & Lacerda, 2018). Para assegurar a estabilidade do sistema LPV em questão foram exploradas funções de Lyapunov de ordem superior, com equações de estado redundantes.

Outra característica comum em sistemas de controle é a saturação dos atuadores. Normalmente, a magnitude do sinal fornecido por um atuador depende de valores máximos e mínimos (Ghiggi, 2008). Isso pode ocorrer devido à energia limitada disponível, segurança

do sistema operacional ou mesmo para redução de custos. No entanto, essa limitação pode causar efeitos indesejáveis no sistema, como ciclos limite, pontos de equilíbrio parasitas e até mesmo levar o sistema à instabilidade (Tarbouriech *et al.*, 2011).

Um outro problema relevante é a análise de estabilidade e a síntese de um sistema sujeito a saturação de atuadores. Embora aparentemente simples, um sistema linear torna-se não linear com a presença desta limitação. Esse problema pode ser formalizado considerando o contexto de estabilidade global e estabilidade local. O primeiro caso ocorre quando o sistema é estável, garantindo que as as trajetórias do sistema convirjam assintoticamente para a origem, para toda condição inicial. Quando o sistema em malha aberta é exponencialmente instável ou quando algumas especificações de desempenho ou robustez devem ser atendidas pelo sistema de malha fechada, somente a estabilização local é possível, garantindo que as trajetórias do sistema convirjam assintoticamente para a origem, para condições iniciais que pertencem a uma determinada região, chamada de Região de Atração (\mathcal{R}_A) (Tarbouriech *et al.*, 2011). Percebe-se, então, que quando restrições de controle estão presentes, pode não ser possível garantir que as trajetórias convirjam para a origem para todas as condições iniciais. Assim é necessário determinar uma estimativa para a região de atração, ou seja, encontrar um conjunto de estados iniciais admissíveis tais que as trajetórias a partir desses pontos sejam, para uma dada lei de controle, convergentes para a origem.

A saturação também é um tema bastante estudado na literatura. Em (Paim, 2003) é realizado um estudo dos problemas de análise e síntese de controladores para sistemas sujeitos à saturação de controle. Além disto, são propostas novas condições para análise de estabilidade para o sistema em regime de saturação, que são obtidas a partir da abordagem baseada na teoria de Lyapunov combinada com o uso do Lema de Finsler e da condição de setor generalizada. Nesse trabalho, duas abordagens são utilizadas para representar a saturação, uma modelagem politópica e uma modelagem do tipo não-linearidade de setor. Em (Corso *et al.*, 2009) são apresentados estudos de leis de controle para uma classe de sistemas não lineares, em tempo contínuo e em tempo discreto, sujeitos à saturação de atuadores. Para a modelagem do sistema saturado foi utilizada uma não-linearidade de tipo zona-morta satisfazendo uma condição de setor modificada, a qual engloba a representação clássica da saturação como um caso particular. Em (Ghiggi, 2008) é abordado o problema de estabilização de sistemas lineares com atrasos nos estados e sujeitos a ação de atuadores saturantes. Em particular, são propostos métodos para a síntese de leis de controle estabilizantes do tipo realimentação de estados, realimentação dinâmica de saída, bem como para a síntese de compensadores de *anti-windup* estáticos e dinâmicos. A partir da teoria de Lyapunov e da modelagem por zona-morta da saturação, com a aplicação de uma condição de setor generalizada, são obtidas condições locais e globais de

estabilização.

Como já mencionado, ambas características, sistemas LPV e atuadores saturantes, têm uma certa importância em sistemas de controle, mas, isto pode ser atestado, também, pelo grande número de publicações sobre estes tópicos que podem ser encontradas em importantes conferências e periódicos da área de controle. Quando se trata dessas duas condições simultaneamente reduz os números de trabalhos encontrados, sendo o caso contínuo no tempo mais presente na literatura. A seguir são descritos alguns trabalhos que tratam sistemas LPV contínuos no tempo com atuadores saturantes. Em (Bosche *et al.* , 2017) é tratado sobre o controle ativo com restrição de saturação do ângulo de direção no veículo para melhorar a segurança e sua estabilidade. A dinâmica do veículo é representada por um sistema LPV contínuo no tempo com entrada saturada. É proposta uma técnica original, baseada na resolução de LMIs, para calcular a matriz de ganho da lei de controle que pode ser estruturada como os parâmetros de um controlador PID robusto. Em (Delibaş *et al.* , 2013) um controlador dependente de parâmetros variantes no tempo para um sistema LPV com atuadores saturantes e distúrbios de energia limitados é projetado. Para isto, utilizam-se funções de Lyapunov dependentes de parâmetros polinomiais homogêneas. Para tratar a saturação é utilizada a condição de setor modificada. Simulações e estudos experimentais em um pêndulo invertido e em um sistema de carrinho ilustram os benefícios da abordagem.

Para o caso discreto no tempo a quantidade de trabalhos é menor comparado com o caso contínuo. Neste trabalho o foco é tratar sistemas LPV discretos no tempo, devido à descontinuidade apresentada nos controladores. Outros trabalhos também priorizam o caso discreto no tempo, como: (Montagner *et al.* , 2007), em que é apresentada uma extensão do teorema de Pólya para encontrar o ganho do controlador para sistemas LPV com atuadores saturantes. O controlador projetado é um ganho de realimentação de estados homogêneo dependente de parâmetros polinomiais de grau arbitrário que estabiliza quadraticamente o sistema de malha fechada e fornece uma estimativa do domínio de atração da origem. A vantagem desse artigo é a possibilidade de encontrar resultados menos conservadores à medida que o grau do polinômio é aumentado; Em (De Souza *et al.* , 2018) é tratado o problema de estabilização robusta para sistemas LPV com atraso variante nos estados e sujeitos a atuadores saturantes. A abordagem baseia-se em reescrever um sistema com atrasos no estado como um sistema LPV atrasado com uma não-linearidade do tipo zona morta e na aplicação da condição de setor generalizada para lidar com os atuadores saturantes. O controlador projetado é dependente do atraso e é estabelecido para um conjunto de condições iniciais e um conjunto de sinais de perturbação admissíveis que garantem a estabilidade entrada-estado. São formulados problemas de otimização convexa que podem, por exemplo, maximizar o conjunto de condições iniciais admissíveis ou

maximizar o limite superior da norma \mathcal{L}_2 das perturbações admissíveis. Tem-se também o trabalho do (Jungers & Castelan, 2011) que trata a estabilização de sistemas não lineares de tempo discreto sob saturação de controle por meio de um controlador de realimentação de saída. A saturação do sinal de controle é representada por uma não linearidade do tipo zona-morta que satisfaz uma condição de setor modificada. São propostas condições de estabilização por meio LMIs que podem ser convertidas em problemas de programação convexos para fins de projeto.

Este trabalho apresenta condições de síntese convexa para sistemas LPV discretos no tempo sujeitos a atuadores saturantes. As condições locais de estabilização são desenvolvidas por meio de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros polinomiais homogêneas e também por meio de funções de Lyapunov poliquadráticas. Além disso, é realizado o projeto de um controlador por realimentação de estados com ação integral para um sistema *quasi*-LPV (Tan *et al.*, 2000). Nesse contexto o trabalho realizado em (Lopes *et al.*, 2017) pode ser citado, em que é realizado um estudo para estabilização local de um sistema não linear discreto no tempo sujeito a saturação de atuador. É adotada a modelagem fuzzy Takagi-Sugeno, que é um método *quasi*-LPV, para obter uma representação do sistema. A síntese dos ganhos fuzzy é realizada via otimização convexa que visa maximizar a região de atração na presença de sinais exógenos limitados em amplitude. A não-linearidade da saturação do sinal de controle é tratada separadamente gerando modelos fuzzy Takagi-Sugeno locais que possuem saturação de controle. É utilizado o seguimento de referência com limitação em amplitude, através da inclusão de um integrador para assegurar a convergência da variável controlada para o valor desejado. A diferença deste presente trabalho é que o sistema não linear é representado por um sistema LPV discreto no tempo.

1.3 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é projetar controladores para a estabilização de um sistema linear com parâmetros variantes no tempo, discreto no tempo, sujeito a atuadores saturantes. É importante ressaltar que, quando um controlador resulta em uma região de atração pequena, isto é, um conjunto pequeno de condições iniciais para as quais assegura-se que as respectivas trajetórias de malha fechada irão convergir para a origem, é considerado um controlador conservador. Já um controlador que consiga resultar em uma região de atração maior será dito menos conservador. Para atingir o objetivo principal, alguns objetivos secundários são elencados:

- Determinar condições de sínteses mais relaxadas, que levem a controladores menos conservadores em relação ao tamanho da região de atração.

- Considerar um índice de desempenho para o sistema de malha fechada na etapa de projeto do controlador.
- Desenvolver procedimentos de otimização convexas para maximizar a região de atração das trajetórias do sistema;
- Considerar o problema de rastreamento de referência.

O primeiro item é alcançado utilizando candidatas funções de Lyapunov mais gerais que dependem do parâmetro não só de forma afim (estabilização poliquadrática) mas também de forma polinomial.

O índice de desempenho, mencionado no segundo item, escolhido é o da λ -contratividade, que é uma medida da velocidade de contração do conjunto de nível relacionado à função de Lyapunov usada. Assim, quanto menor o valor de λ , mais rápido um estado não nulo deve retornar à origem.

E o último item será realizado a partir da inserção da ação integral com um ganho dependente de parâmetro.

1.4 Organização do texto

Esta dissertação é dividida em capítulos para organização dos procedimentos realizados durante o mestrado, conseguindo, assim, facilitar a análise do leitor.

No Capítulo 1 é realizada a descrição do principal problema estabelecido neste trabalho, bem como uma revisão bibliográfica dos assuntos referentes a este problema. Além disso, é declarado o objetivo principal da dissertação e a organização do texto.

No Capítulo 2 são apresentados os conceitos e ferramentas fundamentais para o desenvolvimento dos principais resultados deste trabalho, como: os tipos de sistemas LPV, ferramentas para tratar a saturação dos atuadores, conceitos sobre a abordagem baseada em funções de Lyapunov e, por fim, sobre a estabilização por meio de funções polinomiais homogêneas.

No Capítulo 3 têm-se os primeiros resultados desta dissertação, sendo os menos conservadores. São apresentadas condições baseadas em funções polinomiais homogêneas de grau arbitrário para a estabilização de sistemas LPV com atuadores saturantes. Dois exemplos numéricos são apresentados para ilustrar os resultados obtidos.

No Capítulo 4, primeiramente são mostrados resultados teóricos para uma condição baseada em funções poliquadráticas, que é um caso particular do capítulo 3. Em seguida, é apresentado um procedimento de síntese considerando um controlador com ação integral. Para essa condição foi analisado também o índice de desempenho λ -contratividade. Por fim, são apresentados os resultados experimentais.

No Capítulo 5 são apresentadas as considerações finais sobre o trabalho. Além disso, são mostrados alguns artigos que foram realizados com os resultados desta dissertação e sugestões para trabalhos futuros.

Fundamentos

Neste capítulo são apresentados os principais fundamentos teóricos necessários ao desenvolvimento deste trabalho. Portanto, a apresentação pretende dar elementos mínimos necessários para o acompanhamento dos desenvolvimentos matemáticos feitos nos capítulos seguintes.

2.1 Sistemas LPV

Sistemas LPV são plantas com representações lineares com parâmetros apresentando variação temporal finita, que resulta em modelos no espaço de estados cujas matrizes são funções fixas de algum vetor de parâmetros variantes no tempo (Sename *et al.*, 2013). Nesta seção, são fornecidas as principais definições de sistemas LPV, bem como as definições de sistemas *quasi*-LPV e NLPV (do inglês, *Nonlinear Parameter-Varying*), e as notações relevantes. O foco é discutir a estabilidade e a estabilização para sistemas LPV na representação politópica. Outras representações podem ser encontradas em (Briat, 2015; Mohammadpour & Scherer, 2012).

Um sistema LPV contínuo no tempo é descrito da seguinte maneira:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))u(t), \quad (2.1)$$

em que $\alpha(t)$ é o vetor de parâmetros variante no tempo, que representa as não linearidades do sistema real. $A(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados e $u(t)$ é o sinal de controle do sistema.

Já o sistema discreto no tempo é definido como

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + B(\alpha_k)u_k, \quad (2.2)$$

em que α_k é o vetor de parâmetros variante no tempo. Existem algumas maneiras pela qual esse parâmetro é representado nas matrizes do sistema, um exemplo é a dependência

afim no parâmetro, em que

$$A(\alpha_k) = A_0 + A_1(\alpha_{k,1}) + A_2(\alpha_{k,2}) + \dots + A_N(\alpha_{k,N}), \quad (2.3)$$

e similarmente para a matriz $B(\alpha_k)$, sendo N o número de vértices do sistema. Uma outra forma é a dependência linear no parâmetro, a qual é utilizada neste trabalho. As matrizes do sistema LPV podem, portanto, ser escritas da seguinte forma:

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + B(\alpha_k)u_k, \quad (2.4)$$

em que $A(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, pertencem ao politopo dado pela combinação convexa de N vértices conhecidos:

$$A(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} A_i, \quad B(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} B_i, \quad (2.5)$$

sendo $\alpha_k \in \Lambda$ o vetor dos parâmetros variantes no tempo em que Λ é o simplex unitário:

$$\Lambda = \left\{ \alpha_k \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} = 1, \quad \alpha_{k,i} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \right\}. \quad (2.6)$$

Os parâmetros do sistema LPV podem ser usados para dar mais fidelidade às representações de dinâmicas não lineares, incorporar partes que variam no tempo de maneira sistemática ou até mesmo introduzir graus extras de liberdade que podem ser úteis para uma perspectiva de projeto (Briat, 2015). Vale ressaltar que os parâmetros variantes no tempo de um sistema LPV são assumidos como desconhecidos *a priori*, mas podem ser medidos em tempo real. Em alguns casos, esses parâmetros são função de sinais endógenos, tais como os estados. Nesses casos, os parâmetros não são medidos diretamente, mas podem ser calculados a partir do conhecimento dos sinais que os afetam e das relações com esses sinais. Portanto, quando os parâmetro são calculados a partir de outros sinais, e não medidos diretamente, dizemos que o sistema é *quasi*-linear dependente de parâmetros, mais conhecidos como *quasi*-LPV (Tan *et al.*, 2000). Um exemplo bastante popular na literatura de um *quasi*-LPV são os sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (fuzzy-TS), que por meio de funções de pertinências calculam os parâmetros do sistema. Lopes *et al.* (2017) modelam um processo real por meio de representação fuzzy-TS e então desenvolvem um método convexo para o projeto de controladores *quasi*- dependentes de parâmetros. Outros trabalhos podem ser citados, como (Wang *et al.*, 2018) que projeta um controlador por realimentação de saída com um índice de desempenho H_∞ para um sistema fuzzy-TS e em (Robles *et al.*, 2018) que utiliza sistema *quasi*-LPV, na forma politópica, devido ao fato desse permitir o uso de LMIs. Nos sistemas NLPV os parâmetros variantes no tempo também são medidos, porém esses modelos podem levar a representações de alta fidelidade já que seus parâmetros aparecem de forma não linear. Na literatura também

encontram-se trabalhos com esse tipo de sistema, como pode ser visto em (Blesa *et al.*, 2014).

A classe de sistemas LPV engloba também uma ampla variedade de sistemas de acordo com o tipo de trajetórias dos parâmetros, um exemplo são os sistemas chaveados, em que o vetor de parâmetros só pode assumir valores que sejam 0 ou 1, ou seja, assume-se que apenas um modo de funcionamento está ativo a cada instante de tempo (Briat, 2015). Portanto, os parâmetros do sistema chaveado são definidos no conjunto:

$$\mathcal{P} = \left\{ \alpha \rightarrow \{0,1\}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\}. \quad (2.7)$$

A estabilidade e a estabilização de sistemas LPV, bem como de suas variações, não é garantida utilizando a abordagem baseada em controle clássico, visto que essa não trata sistemas variantes no tempo. Portanto, a teoria de controle moderno surgiu da necessidade de projetar controladores para sistemas mais complexos e precisos. Baseado nisto, uma das possíveis formas de controle empregada em sistemas LPV é baseada no método de Lyapunov, que tem como vantagem representar as condições de análise e síntese por meio de LMIs. Os primeiros resultados obtidos na literatura foram baseados na função de Lyapunov do tipo quadrática. Entretanto nos problemas envolvendo sistemas com incerteza paramétrica, em certos casos relacionados à dependência temporal desses parâmetros, como é o caso dos sistemas LPV, essa noção de estabilidade quadrática torna-se restritiva. Assim, foram desenvolvidas na literatura novas técnicas mais gerais para a redução do conservadorismo, ou seja, técnicas que resultam em controladores com melhor desempenho. Como, por exemplo, as funções de Lyapunov chaveadas (quadráticas por parte) (Almeida *et al.*, 2001), funções dependentes de parâmetros (Daafouz & Bernussou, 2001), dentre das quais se destacam as que são polinomialmente homogêneas nos parâmetros variantes (Rosa *et al.*, 2017), entre outras.

Além de funções de Lyapunov mais gerais, para obter resultados melhores é interessante utilizar também controladores com ganhos dependentes de parâmetros. Os primeiros trabalhos com funções quadráticas utilizavam controladores robustos, isto é, apresentam apenas um ganho para a estabilização de todo o sistema. Entretanto, assim como a função de Lyapunov quadrática tornou-se restritiva para sistemas mais complexos, o controlador robusto também ficou limitado. Sendo assim, foram sendo investigados novos tipos de controladores para esses sistemas. Um exemplo é o controlador com ganhos dependentes de parâmetros linear, o famoso controlador LPV. Para esse caso, um ganho é obtido a cada instante de tempo do sistema, conseguindo obter uma melhor eficiência energética. Controladores mais gerais ainda são os racionais, pois seus parâmetros variantes no tempo apresentam de forma não linear.

Em uma seção deste capítulo será abordada mais sobre o método de Lyapunov, mostrando algumas abordagens existentes na literatura.

2.2 Estabilização de sistemas com saturação

Nesta seção é mostrado o desenvolvimento para tratar a estabilização de sistemas sujeito a atuadores saturantes. Todo o procedimento é realizado para um sistema linear com parâmetros variantes no tempo, assim os resultados apresentados nos próximos capítulos serão enfatizados para esse tipo de sistema.

Considere, portanto, o sistema LPV descrito a seguir:

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + B(\alpha_k)\text{sat}(u_k) \quad (2.8)$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ o vetor de sinais de controle lineares, $A(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, pertencem ao politopo dado em (2.5), com $\alpha_k \in \Lambda$.

A lei de controle aplicada no sistema, considerando um controlador dependente de parâmetros variantes no tempo é:

$$u_k = K(\alpha_k)x_k, \quad (2.9)$$

em que $K(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$. Como o sinal de controle está limitado em amplitude, a lei de controle, portanto, pode ser reescrita como

$$u_k = \text{sat}(K(\alpha_k)x_k), \quad (2.10)$$

ou seja o sinal u_k pertence a um conjunto poliedral Ω definido no espaço de estados por

$$\Omega = \{u_k \in \mathbb{R}^{n_u}; -\rho < u_k < \rho\}, \quad (2.11)$$

em que ρ é o limite simétrico de amplitude com componentes positivas, isto é, $\rho_{(l)} \geq 0$, para todo $l = 1, \dots, n_u$.

A maioria dos processos físicos possuem limitações de amplitude no sinal de controle por motivos físicos ou até mesmo de segurança. Assim, o sinal que antes era $u_k = K(\alpha_k)x_k$, isto é, linear, passa a ser considerado como mostra em (2.10) e pertencente ao conjunto Ω , tornando-se não linear. Por esse motivo é de extrema importância considerar a saturação no momento de projetar um controlador para o sistema. A Figura 2.1 ilustra a função saturação simétrica imposta no sinal de controle do sistema (2.8), podendo assim, observar a não linearidade causada.

A componente $\text{sat}(u_k)_{(\ell)}$ então é dada por

$$\text{sat}(u_k)_{(\ell)} = \begin{cases} \rho_{(\ell)}, & \text{se } u_{k(\ell)} > \rho_{(\ell)} \\ u_{k(\ell)}, & \text{se } -\rho_{(\ell)} \leq u_{k(\ell)} \leq \rho_{(\ell)} \\ -\rho_{(\ell)}, & \text{se } u_{k(\ell)} < -\rho_{(\ell)} \end{cases} \quad (2.12)$$

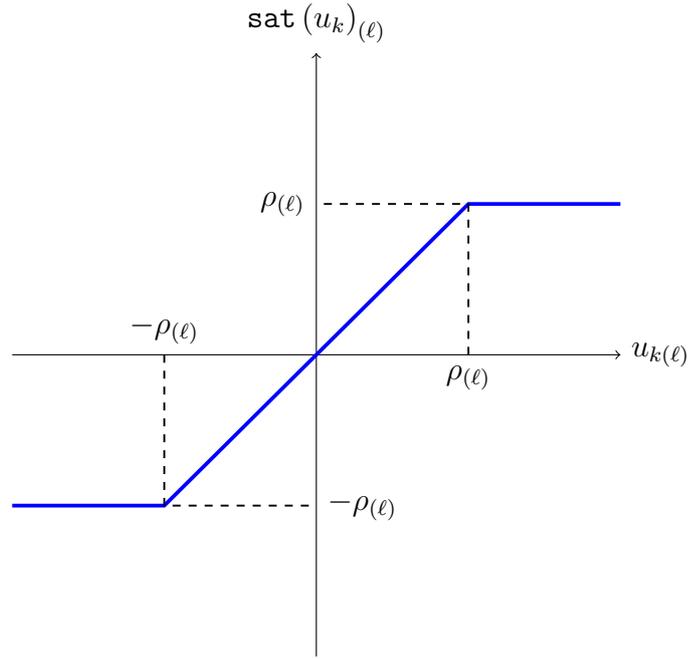


Figura 2.1: Função Saturação.

Devido a essa limitação de amplitude no sinal de controle, pode ocorrer que nem toda condição inicial para o sistema (2.8) resulte em uma trajetória que converge para a origem. O conjunto de todas as condições iniciais que resultam em trajetórias que convergem para a origem é denotada por $\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{R}^n$, sendo denominada região ou bacia de atração. A determinação de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ não é uma tarefa fácil, mesmo para sistemas de pequena ordem, pois essa pode ser não-convexa, aberta e ilimitada (Tarbouriech *et al.*, 2011). Por essa razão, busca-se determinar uma estimativa $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$, em geral a maior possível, tal que $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$. Assim, o controlador projetado sob efeito da saturação nos atuadores garantem a estabilidade assintótica local do sistema (2.8).

A saturação no sinal de controle pode ser tratada de diversas maneiras. Nos trabalhos realizados por Ghiggi (2008); Paim (2003) e Tarbouriech *et al.* (2011), por exemplo, podem-se encontrar detalhadamente a modelagem politópica direta, politópica generalizada e a modelagem por uma não-linearidade do tipo zona-morta. Neste trabalho, a saturação será tratada por meio desta última modelagem, sendo detalhada a seguir.

Define-se a função zona morta, $\Psi(u_k)$:

$$\Psi(u_k) = u_k - \text{sat}(u_k), \quad (2.13)$$

ou seja, $\Psi(u_k) = [\Psi_1(u_k), \Psi_2(u_k), \dots, \Psi_{n_u}(u_k)]$ é uma não-linearidade descentralizada, sem memória e invariante no tempo (Paim, 2003). É equivalente descrever também a

função zona-morta, representada na Figura 2.2, como

$$\Psi(u_{k(\ell)}) = \begin{cases} u_{k(\ell)} - \rho(\ell), & \text{se } u_{k(\ell)} > \rho(\ell) \\ 0, & \text{se } -\rho(\ell) \leq u_{k(\ell)} \leq \rho(\ell) \\ u_{k(\ell)} + \rho(\ell), & \text{se } u_{k(\ell)} < -\rho(\ell) \end{cases} \quad (2.14)$$

para todo $\ell \in [1, n_u]$.

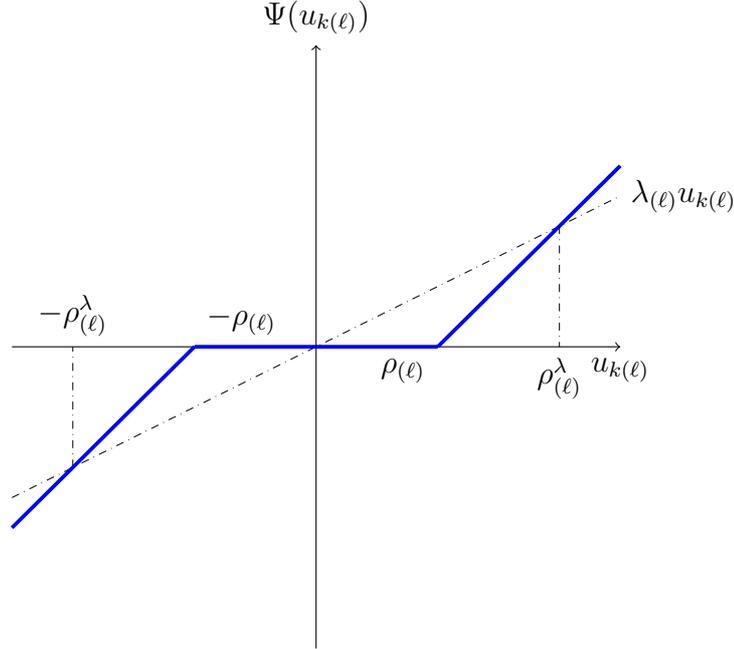


Figura 2.2: Função Zona Morta.

A não-linearidade $\Psi(u_k)$ pertence localmente ao setor desde que

$$-\rho(\ell) = \frac{-\rho(\ell)}{1 - \lambda(\ell)} \leq u_{k(\ell)} \leq \frac{\rho(\ell)}{1 - \lambda(\ell)} = \rho(\ell)^\lambda, \quad (2.15)$$

em que $0 \leq \lambda(\ell) \leq 1$.

Portanto, o sistema (2.8), com a lei de controle dada em (2.9), pode ser reescrito como:

$$x_{k+1} = \mathcal{A}_{cl}(\alpha_k)x_k - B(\alpha_k)\Psi\left(K(\alpha_k)x_k\right), \quad (2.16)$$

em que $\mathcal{A}_{cl}(\alpha_k) = A(\alpha_k) + B(\alpha_k)K(\alpha_k)$.

Com base nas considerações acima sobre a modelagem por meio da zona-morta, duas condições de setor podem ser utilizadas para descender condições de estabilização para o sistema (2.16): condição de setor clássica e a condição de setor generalizada. Quando se trata da modelagem por meio da função zona-morta, a condição de setor generalizada resulta em condições menos conservadoras do que o uso do setor clássico, além disso permite obter condições de síntese de controladores de maneira convexa na forma de LMIs (Tarbouriech *et al.*, 2011). Devido a estes motivos será utilizada a condição de setor generalizada para a estabilização do sistema (2.16).

Considere o sinal $u_k - v_k$ em que o sinal auxiliar $v(k) = Gx_k$ é usado como um grau de liberdade no projeto apresentado adiante. Define-se o conjunto \mathbb{S} com os estados x_k tais que $u_k - v_k$ é limitado em módulo por ρ :

$$\mathbb{S}(u_k - v_k, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : |[K_{(r)} - G_{(r)}] x_k| \leq \rho_{(r)}\} \quad (2.17)$$

para $r = 1, \dots, n_u$.

O lema seguinte, proposto por Gomes da Silva Jr. & Tarbouriech (2005), é conhecido como condição generalizada de setor e é usado para tratar os sinais $u_k - v_k$ na região em que esse não satura, isto é, na região em que o limite de saturação dado por $\pm\rho$ não é ultrapassado.

Lema 2.1 *Se o sinal $u_k - v_k \in \mathbb{S}$, então*

$$\Psi(u_k)^T S(\Psi(u_k) - v_k) \leq 0 \quad (2.18)$$

é verificada para toda matriz diagonal definida positiva $S \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$.

Para a estabilização do sistema (2.16) a matriz de ganho do conjunto \mathbb{S} é dependente de parâmetro, $K(\alpha_k)$. As condições principais deste trabalho são estabelecidas utilizando as matrizes G e S dependentes de parâmetros também, sendo $G(\alpha_k)$ e $S(\alpha_k)$, com a intenção de diminuir o conservadorismo e obter resultados mais gerais.

2.3 Estabilidade no sentido de Lyapunov

A estabilidade de um sistema utilizando diretamente a definição de ponto de equilíbrio é facilitada usando a teoria de Lyapunov. Esse método está relacionado com a energia interna do sistema. Se a energia do sistema decresce com relação ao tempo à medida que o tempo tende ao infinito, pode-se dizer que o sistema é assintoticamente estável (Trofino *et al.*, 2000). Para quantificar essa energia, é utilizada uma função escalar denominada função de Lyapunov. Assim, se essa função é sempre positiva, e decrescente em relação ao tempo, as trajetórias do sistema tendem à origem, isto é, o sistema é assintoticamente estável. A seguir será ilustrado o procedimento para certificar a estabilidade de um sistema utilizando uma função de Lyapunov.

Considere o sistema discreto no tempo dependente de parâmetro variante no tempo,

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k, \quad (2.19)$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados do sistema e $A(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pertence ao politopo dado pela combinação convexa de N vértices conhecidos:

$$A(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} A_i, \quad (2.20)$$

sendo $\alpha_k \in \Lambda$ o vetor dos parâmetros variantes no tempo em que Λ é o simplex unitário:

$$\Lambda = \left\{ \alpha_k \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} = 1, \quad \alpha_{k,i} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \right\}. \quad (2.21)$$

Como já mencionado, para a estabilidade do sistema (2.19)–(2.21) será utilizado o método de Lyapunov, o qual pode ser definido no próximo teorema. Antes disso, é feita uma observação para definir as funções de classe \mathcal{K} que são utilizadas.

Nota: Funções de classe \mathcal{K} são definidas no intervalo de $[0, a) \rightarrow [0, \infty)$ e são estritamente crescentes, mais detalhes pode ser encontrado em (Khalil, 2002, pág. 144).

Teorema 2.1 *Seja $V(x_k)$ uma função de Lyapunov para o sistema (2.19)–(2.21), e sejam $\beta_1(\|x_k\|)$, $\beta_2(\|x_k\|)$ e $\beta_3(\|x_k\|)$ funções de classe \mathcal{K} , $\forall k > 0$. Se as condições*

$$\begin{aligned} \beta_1(\|x_k\|) &\leq V(x_k) \leq \beta_2(\|x_k\|) \\ \Delta V(x_k) &\leq -\beta_3(\|x_k\|) < 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

sendo $\beta_i \in \{1, 2, 3\}$ escalares positivos, então o sistema (2.19)–(2.21) é assintoticamente estável.

O próximo passo é definir uma candidata função de Lyapunov que satisfaça as condições do Teorema 2.1. Existem diferentes maneiras de definir uma função de Lyapunov, o difícil é saber qual função provoca um resultado menos conservador para o sistema trabalhado. A função mais comum de ser utilizada na literatura é a quadrática,

$$V(x_k) = x_k^T P x_k, \quad (2.23)$$

em que P é uma matriz constante, real e simétrica. Dessa forma, para $V(x_k) > 0$, se existir uma matriz P satisfazendo as condições do Teorema 2.1, então o sistema é quadraticamente estável. Porém, essa função é bastante restritiva para sistemas variantes no tempo como é o caso do sistema (2.19), isso se deve porque as condições formuladas a partir dessa função são definidas somente nos vértices do politopo, assim, os resultados utilizando esse tipo de função são muito conservadores.

No trabalho realizado por Pessim & Lacerda (2018) é utilizada uma candidata a função de Lyapunov com matrizes dependentes de parâmetros variantes no tempo do tipo:

$$V(x_k) = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1(\alpha_k) & 0 \\ 0 & P_2(\alpha_{k+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.24)$$

em que existem matrizes simétricas dependentes de parâmetro $P_1(\alpha_k)$ e $P_2(\alpha_{k+1}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Em (Bertolin *et al.*, 2018) é adotada uma candidata função de Lyapunov dependente de parâmetro de ordem superior, isto é, os estados do sistema são aumentados,

$$V(x_\kappa(k)) = x_\kappa(k)^T P_\kappa(\alpha_k) x_\kappa(k) > 0, \quad (2.25)$$

em que $P_\kappa(\alpha_k) = P_\kappa(\alpha_k)^T \in \mathbb{R}^{(\kappa n) \times (\kappa n)}$ e $x_k^T = [x_k^T \ x_{k+1}^T \ \dots \ x_{k+\kappa-1}^T]^T$.

Note que os dois trabalhos mencionados acima utilizam funções dependentes de parâmetros variante no tempo, o que torna a função mais geral, diminuindo o conservadorismo. Assim, o procedimento para a estabilidade de (2.19)–(2.21) utiliza a candidata a função de Lyapunov:

$$V(x_k) = x_k^T P(\alpha_k) x_k, \quad (2.26)$$

$$P(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} P_i > 0, \quad (2.27)$$

O teorema a seguir fornece uma solução por meio de desigualdades lineares matriciais para o problema de estabilidade do sistema (2.19)–(2.21) segundo método de Lyapunov.

Teorema 2.2 *Considere o sistema discreto no tempo descrito em (2.19)–(2.21). Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de tal forma que as LMIs*

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i^T P_j \\ \star & P_j \end{bmatrix} > 0 \quad (2.28)$$

sejam satisfeitas, para todo $i, j = 1, \dots, N$, então, o sistema (2.19)–(2.21) é assintoticamente estável.

Prova: Assuma que a condição dada em (2.28) é satisfeita. Multiplica-se (2.28) por α_i, α_j para todo $\alpha \in \Lambda$, e faz-se o somatório em $i, j = 1, \dots, N$, assim,

$$\begin{bmatrix} P(\alpha_k) & A(\alpha_k)^T P(\alpha_{k+1}) \\ \star & P(\alpha_{k+1}) \end{bmatrix} > 0. \quad (2.29)$$

Aplica-se o complemento de Schur (veja Apêndice A), obtendo

$$A(\alpha_k)^T P(\alpha_{k+1}) A(\alpha_k) - P(\alpha_k) < 0. \quad (2.30)$$

Por fim, pré- e pós-multiplica-se a inequação (2.30) por x_k^T e x_k , respectivamente, e, substituindo $A(\alpha_k)x_k$ por x_{k+1} conforme apresenta em (2.19), tem-se

$$x_{k+1}^T P(\alpha_{k+1}) x_{k+1} - x_k^T P(\alpha_k) x_k < 0, \quad (2.31)$$

isto é,

$$\Delta V(x_k) < 0. \quad (2.32)$$

Portanto, a verificação das condições dadas em (2.28) implica na positividade da função de Lyapunov dada em (2.26) e na negatividade de $\Delta V(x_k)$ com funções de classe \mathcal{K} dadas por $\beta_1(\|x_k\|) \leq V(x_k) \leq \beta_2(\|x_k\|)$ e $\Delta V(x_k) \leq -\beta_3(\|x_k\|) < 0$, em que

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \min_{i=1, \dots, N} \lambda_{\min} P_i \|x_k\|_2^2, \\ \beta_2 &= \max_{i=1, \dots, N} \lambda_{\max} P_i \|x_k\|_2^2, \\ \beta_3 &> 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

De acordo com o Teorema 2.1, conclui-se, então, que o sistema (2.19) é assintoticamente estável. ■

2.4 Polinômios positivos

A classe das funções matriciais polinomiais é bastante geral. No entanto, usando os resultados de Bliman (2004), verifica-se que para fins de teste de positividade de um polinômio matricial pode-se restringir os polinômios à classe dos polinômios homogêneos, sem perda de generalidade. Isto é, se existe $P(\alpha) > 0$ tal que

$$\text{He}(A(\alpha)'P(\alpha)) < 0, \quad (2.34)$$

então existe uma $P(\alpha)$ que seja polinomial. Além disso, se $\alpha \in \Lambda$, então a classe de $P(\alpha)$ polinomial pode ser restrita à classe das $P(\alpha)$ que são polinomialmente homogêneas no parâmetro. Além disso, (Hardy *et al.*, 1952) estabelece uma propriedade importante dos polinômios homogêneos, descrito no Teorema de Pólya a seguir.

Teorema 2.3 *Seja $F(\alpha) \triangleq F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ um polinômio homogêneo que é positivo para todo $\alpha \in \Lambda$. Então para um d suficientemente grande, o polinômio resultante do produto $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N)^d F(\alpha)$ tem todos os coeficientes estritamente positivos.*

Com o Teorema de Pólya consegue-se testar a positividade de um polinômio aumentando-se o valor de d , isto é, para um certo d todos os monômios possuem coeficientes positivos, caso o polinômio testado seja positivo. Nota-se nesse teorema que cada monômio tem que ser positivo, sendo isso suficiente e necessário para um valor de d suficientemente grande. Portanto, o Teorema de Pólya é usado como uma relaxação para a busca de um dado $P(\alpha)$ homogêneo.

Esse teorema pode ser generalizado para o caso matricial, como feito por Bliman (2004). No trabalho realizado por Oliveira (2006) é apresentado um exemplo mostrando que com o aumento do d o número de variáveis das condições mantém-se o mesmo, porém aumenta o número de restrições e, conseqüentemente a complexidade numérica.

Uma vantagem de se utilizar as relaxações de Pólya, é pelo fato de ser possível construir um procedimento convergente por meio de uma sequência de LMIs parametrizadas no grau g da matriz de Lyapunov, $P_g(\alpha)$, isto é, uma função de Lyapunov polinomial homogênea de grau arbitrário, e no nível d das relaxações. Nesse caso, para o projeto de controlador de um sistema só seria possível para um valor de g e d suficientemente grande. As funções polinomiais homogêneas serão detalhadas na próxima subseção.

Existe ainda a possibilidade de considerar o d nulo e trabalhar somente com o grau das matrizes polinomiais homogêneas. Nesse caso, basta aumentar o valor de g para garantir a convergência das condições. Aumentar o grau das variáveis produz resultados equivalentes a aumentar o valor de d no teorema de Pólya. A vantagem de fazer isso é devido a complexidade numérica, pois o número de linhas de LMIs crescem muito a

medida que o g e d aumentam. Neste trabalho, é realizado apenas o uso do grau das matrizes para a convergência dos sistemas. A relaxação de Pólya não é realizada, sendo uma possibilidade de investigação futura.

2.4.1 Funções polinomiais homogêneas

Um aspecto que tem contribuído para o conservadorismo dos resultados obtidos a partir de LMIs, para sistemas não lineares representados em sistemas LPV, é a utilização de funções de Lyapunov menos gerais, como a quadrática. Um dos motivos dessa função não ser considerada geral é que não considera a dinâmica das incertezas. Assim, novas funções foram sendo investigadas, como as quadráticas por parte (Almeida *et al.*, 2001; Leite & Peres, 2004), as dependentes linearmente nos parâmetros (Daafouz & Bernussou, 2001; Pandey & De Oliveira, 2018) e mais gerais ainda as dependentes de parâmetros polinomiais homogêneos. Essas últimas funções são consideradas mais gerais devido a possibilidade de incluir um grau arbitrário. A medida que o projetista aumenta o grau da função polinomial homogênea, aumenta o número de sistemas estabilizáveis e diminui o conservadorismo. A principal desvantagem dessas funções é o esforço computacional demandando à medida que os parâmetros e o grau do polinômio aumentam. Alguns trabalhos da literatura mostram resultados satisfatórios com essas funções como o trabalho realizado por Oliveira & Peres (2007) que investiga a estabilidade de sistemas incertos utilizando uma candidata a função de Lyapunov dependente de parâmetro polinomial homogêneo. O método proposto apresentou resultados melhores que outros apresentados na literatura. O trabalho do Bliman (2004) também busca resultados melhores a partir de funções HPPD. Outros exemplos de trabalhos são os desenvolvidos por Rosa *et al.* (2017) e por Chesi *et al.* (2007) que notaram resultados menos conservadores à medida que o grau da função matricial polinomial homogênea aumentava.

Na seção anterior, foi visto que quando a função de Lyapunov é dependente linearmente de parâmetros variantes no tempo a matriz $P(\alpha_k)$ é dada conforme apresentado em (2.27), isto é,

$$P(\alpha_k) = \alpha_{k,1}P_1 + \alpha_{k,2}P_2 + \dots + \alpha_{k,N}P_N. \quad (2.35)$$

Entretanto, para uma dependência polinomial no parâmetro com um grau superior a 1, essa forma de apresentação da matriz $P(\alpha_k)$ não é apropriada. Sendo assim, nas equações seguintes são mostrados a forma de representar a matriz $P(\alpha_k)$ para polinômios de grau 1, 2 e 4, respectivamente para um sistema com 2 vértices:

$$\begin{aligned} P_1(\alpha_k) &= \alpha_{k,1}P_{10} + \alpha_{k,2}P_{01}, \\ P_2(\alpha_k) &= \alpha_{k,1}^2P_{20} + \alpha_{k,1}\alpha_{k,2}P_{11} + \alpha_{k,2}^2P_{02}, \\ P_4(\alpha_k) &= \alpha_{k,1}^4P_{40} + \alpha_{k,1}^3\alpha_{k,2}P_{31} + \alpha_{k,1}^2\alpha_{k,2}^2P_{22} + \alpha_{k,1}\alpha_{k,2}^3P_{13} + \alpha_{k,2}^4P_{04}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

A notação e o desenvolvimento utilizados nesta parte são propostos no trabalho do (Oliveira, 2006). O subíndice da matriz $P(\alpha_k)$ mostra o grau do polinômio que está sendo utilizado, que normalmente é indicado pela letra g . Os subíndices de cada P acompanham os índices dos expoentes dos seus respectivos monômios, sendo indicados por $\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_N$. O conjunto das N -uplas obtidas com todas combinações $\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_N$, tal que $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_N = g$ é denotado por $\mathcal{K}(g)$. Portanto, generalizando a notação de $P(\alpha_k)$, tem-se

$$P_g(\alpha_k) = \sum_{\gamma \in \mathcal{K}(g)} \alpha_{k,1}^{\gamma_1} \dots \alpha_{k,N}^{\gamma_N} P_\gamma, \quad \gamma = \gamma_1\gamma_2\dots\gamma_N, \quad \forall \gamma \in \mathcal{K}(g) \quad (2.37)$$

em que $\alpha_k \in \Lambda$ e $P_\gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$. O número de elementos em $\mathcal{K}(g)$ é dado por

$$\mathcal{J}(g) = \frac{(N + g - 1)!}{g!(N - 1)!}, \quad (2.38)$$

sendo N o número de vértices do politopo da matriz A do sistema. Assim,

$$P_g(\alpha_k) = \sum_{j=1}^{\mathcal{J}(g)} \alpha_{k,1}^{\gamma_1} \dots \alpha_{k,N}^{\gamma_N} P_\gamma, \quad \gamma = \gamma_1\gamma_2\dots\gamma_N = \mathcal{K}_j(g). \quad (2.39)$$

Na sequência são apresentados alguns exemplos ilustrativos de funções matriciais polinomiais homogêneas.

Exemplos:

- Considere uma função matricial polinomial homogênea com $\alpha_k \in \Lambda$, com $N = 3$ e grau 2 denotada por $P_2(\alpha_k)$. Essa função é expressa como:

$$P_2(\alpha_k) = \alpha_{k,1}^2 P_{200} + \alpha_{k,1}\alpha_{k,2} P_{110} + \alpha_{k,1}\alpha_{k,3} P_{101} + \alpha_{k,2}^2 P_{020} + \alpha_{k,2}\alpha_{k,3} P_{011} + \alpha_{k,3}^2 P_{002},$$

sendo $\mathcal{K}(2) = \{200, 110, 101, 020, 011, 002\}$ e $\mathcal{J}(2) = 6$.

- Considere uma função matricial dada por $P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$, com $\alpha \in \Lambda$. Note que se multiplicar essa função por um polinômio homogêneo de grau 3, $(\alpha_1 + \alpha_2)^3$, obtém-se $P = (\alpha_1 + \alpha_2)^3(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) = \alpha_1^4 P_1 + 3\alpha_1^3 \alpha_2 P_1 + 3\alpha_1^2 \alpha_2^2 P_1 + \alpha_1 \alpha_2^3 P_1 + \alpha_1^3 \alpha_2 P_2 + 3\alpha_1^2 \alpha_2^2 P_2 + 3\alpha_1 \alpha_2^3 P_2 + \alpha_2^4 P_2$, que por sua vez corresponde à representação polinomial homogênea dada por

$$P_4(\alpha_k) = \alpha_{k,1}^4 P_{40} + \alpha_{k,1}^3 \alpha_{k,2} P_{31} + \alpha_{k,1}^2 \alpha_{k,2}^2 P_{22} + \alpha_{k,1} \alpha_{k,2}^3 P_{13} + \alpha_{k,2}^4 P_{04},$$

com $\mathcal{K}(4) = \{40, 31, 22, 13, 04\}$ e $\mathcal{J}(4) = 5$, em que

$$\begin{aligned} P_{40} &= P_1, \\ P_{31} &= 3P_1 + P_2, \\ P_{22} &= 3P_1 + 3P_2, \\ P_{13} &= P_1 + 3P_2, \\ P_{04} &= P_2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

- Considere um politopo formado por três vértices, isto é, $N = 3$ e uma função matricial polinomial homogênea de grau igual a 1, assim

$$P_1(\alpha_k) = \alpha_{k,1}P_{1000} + \alpha_{k,2}P_{0100} + \alpha_{k,3}P_{0010} + \alpha_{k,4}P_{0001},$$

sendo $\mathcal{K}(1) = \{1000,0100,0010,0001\}$ e $\mathcal{J}(1) = 4$.

Em particular, funções polinomiais de grau g podem expressar uma constante Υ (matriz ou escalar) como

$$\Upsilon = \sum_{\gamma \in \mathcal{K}(g)} \alpha_{k,1}^{\gamma_1} \dots \alpha_{k,N}^{\gamma_N} c_\gamma \Upsilon \quad (2.41)$$

com

$$c_\gamma = \frac{g!}{\gamma_1! \dots \gamma_N!}. \quad (2.42)$$

Para ilustrar esse fato, considere a matriz constante Υ expressa como um polinômio homogêneo de grau 2 e dois vértices, isto é,

$$\Upsilon = \alpha_{k,1}^2 c_{20} \Upsilon + \alpha_{k,1} \alpha_{k,2} c_{11} \Upsilon + \alpha_{k,2}^2 c_{02} \Upsilon,$$

sendo

$$c_{20} = c_{02} = \frac{2!}{0!2!} = 1, \quad c_{11} = \frac{2!}{1!1!} = 2.$$

Então, é equivalente dizer que $\Upsilon = \alpha_{k,1}^2 \Upsilon + 2\alpha_{k,1} \alpha_{k,2} \Upsilon + \alpha_{k,2}^2 \Upsilon$ ou de forma simplificada $\Upsilon = (\alpha_{k,1} + \alpha_{k,2})^2 \Upsilon$ com $(\alpha_{k,1} + \alpha_{k,2}) = 1$.

No próximo capítulo são propostos novos procedimentos para o projeto de controladores que estabilizam localmente um sistema LPV com atuadores saturantes, por meio de uma função de Lyapunov polinomial homogênea de grau arbitrário, como mostra nesta seção. Além disso, é importante ressaltar que quando se faz a análise de estabilidade ou a síntese de leis de controle para a estabilização de um sistema utilizando esse método, frequentemente, ocorre o produto de dois polinômios homogêneos, como por exemplo

$$P_g(\alpha_k)A(\alpha_k), \quad (2.43)$$

que resulta em um polinômio homogêneo com grau $g + 1$, pois a matriz dinâmica $A(\alpha_k)$ pertence ao politopo dado em (2.5)(Oliveira, 2006).

2.5 Considerações finais

Neste capítulo foram apresentadas algumas definições e ferramentas matemáticas para a realização deste trabalho, como: definições de sistemas LPV; ferramentas necessárias para a análise de estabilidade e a estabilização de sistemas com saturação no sinal de controle; definição do método de Lyapunov e como utilizá-lo; e funções polinomiais homogêneas, que são utilizadas para síntese de controladores de sistemas LPV com saturação de amplitude nos atuadores.

Controladores racionais para sistemas LPV sob saturação

Neste capítulo investiga-se o problema de estabilização local para a classe de sistemas LPV, discretos no tempo, sujeitos a atuadores saturantes. As principais contribuições são novas condições convexas para o projeto de ganhos de realimentação de estado, dependentes racionalmente do vetor de parâmetros, que asseguram a estabilidade local do sistema em malha fechada para trajetórias iniciadas em um conjunto contido na região de atração. Graças a um conjunto de níveis definido a partir de uma função Lyapunov polinomialmente homogênea nos parâmetros, obtêm-se estimativas menos conservadoras da região de atração, isto é, abrange um número maior de condições iniciais contidas nessa região.

São propostas duas condições convexas para tratar o problema de estabilização local de sistemas LPV sob saturação. A primeira, é formulada com base na proposta feita por Pandey & de Oliveira (2017), em que considera a dependência de parâmetro da matriz de entrada $B(\alpha_k)$ para o caso linear, porém é utilizada nesta condição uma candidata a função de Lyapunov polinomialmente homogênea nos parâmetros variantes no tempo. Dessa forma, a primeira condição de projeto de controlador apresentada neste capítulo produz resultados mais gerais do que aquelas baseadas na estabilidade poliquadrática realizado por Pandey & de Oliveira (2017). O projetista pode aumentar o grau de tais matrizes, reduzindo o conservadorismo das estimativas região de atração. A segunda condição é obtida em uma abordagem ligeiramente diferente, usando um número menor de variáveis de folga, mas permitindo igualmente a dependência do parâmetro da matriz de entrada $B(\alpha_k)$.

Serão apresentados dois exemplos que ilustram os aspectos numéricos das condições propostas e dão ao leitor uma perspectiva das relações referentes ao conservadorismo e ao grau das funções HPPD.

3.1 Preliminares

Considere o sistema linear discreto no tempo com parâmetros lineares variantes no tempo e sujeito a atuadores saturantes, cujos modelos podem ser descritos por:

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + B(\alpha_k)\text{sat}(u_k) \quad (3.1)$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ o vetor de sinais de controle lineares, $A(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, pertencem ao politopo dado pela combinação convexa de N vértices conhecidos:

$$A(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} A_i, \quad B(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} B_i, \quad (3.2)$$

sendo $\alpha_k \in \Lambda$ o vetor dos parâmetros variantes no tempo em que Λ é o simplex unitário:

$$\Lambda = \left\{ \alpha_k \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} = 1, \quad \alpha_{k,i} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \right\}. \quad (3.3)$$

A função de saturação (simétrica), $\text{sat}(u_k)$, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\text{sat}(u_{k,(r)}) = \text{sign}(u_{k,(r)}) \min(|u_{k,(r)}|, \rho_{(r)}), \quad (3.4)$$

$r = 1, \dots, n_u$, em que $\rho \in \mathbb{R}^{n_u}$ e $\rho_{(r)}$ é a amplitude máxima permitida para o r -ésimo sinal de controle. Assume-se que o vetor de parâmetros variantes no tempo, α_k , está disponível em tempo real permitindo o uso da lei de controle

$$u_k = K(\alpha_k)x_k, \quad (3.5)$$

em que $K(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$.

Para tratar o termo $\text{sat}(u_k)$, define-se a função zona morta, $\Psi(u_k)$:

$$\Psi(u_k) = u_k - \text{sat}(u_k), \quad (3.6)$$

com a qual pode-se escrever o sistema em malha fechada como:

$$x_{k+1} = \mathcal{A}_{cl}(\alpha_k)x_k - B(\alpha_k)\Psi(K(\alpha_k)x_k), \quad (3.7)$$

em que $\mathcal{A}_{cl}(\alpha_k) = A(\alpha_k) + B(\alpha_k)K(\alpha_k)$.

Devido à saturação dos atuadores, é necessário determinar uma estimativa da região de atração ($\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$), em que todas as trajetórias dos estados, iniciados dentro desta região, convergem para origem. Uma maneira de construir a estimativa $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ é utilizar os conjuntos de nível de uma função de Lyapunov associada ao sistema em malha fechada. Para isso, é necessário determinar uma candidata função de Lyapunov. Neste capítulo é proposta

uma função polinomial homogênea dependente de parâmetros variante no tempo, α_k , com a finalidade de obter controladores que resultem numa malha fechada com melhor desempenho e, ao mesmo tempo, possuam uma região de atração em torno da origem que seja a maior possível.

Assim, pode-se formalizar o principal problema investigado neste capítulo como segue.

Problema 3.1 *Considere o sistema LPV discreto no tempo (3.1)-(3.4) sob ação da lei de controle (3.5). Determine o ganho $K(\alpha_k)$, para todo $\alpha_k \in \Lambda$, de tal forma que o sistema em malha fechada seja localmente estável para todas condições iniciais pertencentes a um conjunto admissível de condições iniciais contido em \mathcal{R}_A e que seja o maior possível.*

Nas próximas subseções e seções são apresentadas uma candidata à função de Lyapunov HPPD, a caracterização da região de atração por meio de um conjunto de nível com condições finitas e as condições encontradas para o cálculo dos ganhos do controlador.

3.1.1 Candidata a função de Lyapunov HPPD

A estabilização local do sistema LPV discreto no tempo sujeito a atuadores saturantes (3.1)-(3.4) é investigada com o auxílio de uma candidata a função de Lyapunov dependente de parâmetro, dada por:

$$V(x_k, \alpha_k) = x_k^T Q_g(\alpha_k)^{-1} x_k, \quad (3.8)$$

em que g é o grau da matriz polinomial homogênea $Q_g(\alpha_k)$. Para ser admitida como uma função de Lyapunov, $V(x_k, \alpha_k)$ tem de satisfazer, para todo $x_k \in \mathcal{R}_E$ e $\alpha_k \in \Lambda$, as condições do Teorema 2.1.

Sabe-se que $\mathcal{K}(g)$ é o conjunto de N -uplas obtidas como todas combinações de γ_i , $i = 1, \dots, N$, tal que $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_N = g$. Dessa forma, a matriz $Q_g(\alpha_k)$, $Q_g(\alpha_k) = Q_g(\alpha_k)^T$, dada em (3.8) pode ser escrita como

$$Q_g(\alpha_k) = \sum_{\gamma \in \mathcal{K}(g)} \alpha_{k,1}^{\gamma_1} \dots \alpha_{k,N}^{\gamma_N} Q_\gamma, \quad \gamma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_N, \quad \forall \gamma \in \mathcal{K}(g), \quad (3.9)$$

em que $\alpha_k \in \Lambda$ e $Q_\gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

3.1.2 Conjunto de nível

A estimativa da região de atração é caracterizada conforme no conjunto de nível da função de Lyapunov. Como mencionado na subseção anterior, a função de Lyapunov proposta é dependente de parâmetros polinomial homogênea.

O lema a seguir generaliza o resultado apresentado originalmente por Jungers & Castelan (2011) para funções de Lyapunov dependentes linearmente do parâmetro e que foi estendido por Palmeira *et al.* (2018) para funções de Lyapunov dependentes de forma afim no parâmetro.

Lema 3.1 *Suponha que $V(x_k, \alpha_k)$ dada em (3.8) é uma função de Lyapunov para o sistema (3.7). Então, para $\mu > 0$ e para todo $\alpha_k \in \Lambda$ o conjunto de nível*

$$\mathcal{L}_V(\mu) = \bigcap_{\alpha_k \in \Lambda} \mathcal{E}(Q_g(\alpha_k)^{-1}, \mu), \quad (3.10)$$

em que

$$\mathcal{E}(Q_g(\alpha_k)^{-1}, \mu) = \{x_k \in \mathbb{R}^n : x_k^T Q_g(\alpha_k)^{-1} x_k \leq \mu, \forall \alpha_k \in \Lambda\}, \quad (3.11)$$

tem as seguintes propriedades:

1. É contrativo para as trajetórias do sistema de malha fechada (3.7) para todo $x_0 \in \mathcal{L}_V(\mu)$.
2. O cômputo de $\mathcal{L}_V(\mu)$ dado em (3.10) pode ser realizada de forma equivalente por meio de condições finitas,

$$\mathcal{L}_V(\mu) \equiv \bigcap_{\gamma \in \mathcal{K}(g)} \mathcal{E}(Q_\gamma^{-1}, c_\gamma^{-1} \mu), \quad (3.12)$$

com

$$\mathcal{E}(Q_\gamma^{-1}, c_\gamma^{-1} \mu) = \{x_k \in \mathbb{R}^n : x_k^T Q_\gamma^{-1} x_k \leq c_\gamma^{-1} \mu, \forall \alpha_k \in \Lambda\}, \quad (3.13)$$

e c_γ dado por (2.42).

Prova: A propriedade 1 é assegurada devido à hipótese de $V(x_k, \alpha_k)$ ser uma função de Lyapunov.

Para comprovar a propriedade 2, primeiramente é mostrado que se x_k pertence a $\bigcap_{\gamma \in \mathcal{K}(g)} \mathcal{E}(Q_\gamma^{-1}, c_\gamma^{-1} \mu)$, então $x_k \in \mathcal{L}_V(\mu)$. Além disso, com base em (3.13), assuma que $x_k^T Q_\gamma^{-1} x_k \leq c_\gamma^{-1} \mu$ seja verificado. Então, multiplicando-se ambos os lados por c_γ^2 obtém-se $x_k^T c_\gamma^2 Q_\gamma^{-1} x_k \leq c_\gamma \mu$, que, fazendo o complemento de Schur, é equivalente a

$$\begin{bmatrix} Q_\gamma & c_\gamma x_k \\ c_\gamma x_k^T & c_\gamma \mu \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}. \quad (3.14)$$

Multiplicando (3.14) por $\alpha_{k,1}^{\gamma_1} \dots \alpha_{k,N}^{\gamma_N}$, $\gamma \in \mathcal{K}(g)$, fazendo o somatório em γ e usando a equação (2.41), recupera-se $x_k^T Q_g(\alpha_k)^{-1} x_k \leq \mu$, para todo $\alpha_k \in \Lambda$, o que permite concluir que $x_k \in \mathcal{L}_V(\mu)$.

Na sequência, é necessário mostrar que se x_k pertence a $\mathcal{L}_V(\mu)$ para todo $\alpha_k \in \Lambda$, então verifica-se (3.13). Portanto, assumindo que x_k é tal que $x_k^T Q_g(\alpha_k)^{-1} x_k \leq \mu$, pode ser aplicado o complemento de Schur e usando-se (3.9) e (2.41), tem-se

$$\begin{bmatrix} \sum_{\gamma \in \mathcal{K}(g)} \alpha_{k,1}^{\gamma_1} \dots \alpha_{k,N}^{\gamma_N} Q_\gamma & x_k \\ x_k^T & \sum_{\gamma \in \mathcal{K}(g)} \alpha_{k,1}^{\gamma_1} \dots \alpha_{k,N}^{\gamma_N} c_\gamma \mu \end{bmatrix} \equiv \sum_{\gamma \in \mathcal{K}(g)} \alpha_{k,1}^{\gamma_1} \dots \alpha_{k,N}^{\gamma_N} \begin{bmatrix} Q_\gamma & c_\gamma x_k \\ c_\gamma x_k^T & c_\gamma \mu \end{bmatrix} \geq \mathbf{0},$$

implicando que $x_k^T Q_\gamma^{-1} x_k \leq c_\gamma^{-1} \mu$, para todo $\gamma \in \mathcal{K}(g)$. \blacksquare

Para a função polinomial homogênea de grau $g = 1$, as condições apresentadas no Lema 3.1 recuperam o Lema 4 dado por Jungers & Castelan (2011). Nesse caso, os coeficientes c_γ calculados por meio da equação (2.42) são equivalentes a 1.

3.2 Estabilização via estabilidade poliquadrática

Nesta seção é apresentada a primeira condição proposta neste trabalho como resultado principal, como mostra o teorema a seguir:

Teorema 3.1 *Considere o sistema discreto no tempo descrito em (3.1)-(3.4). Se existirem matrizes simétricas definidas positivas HPPD $Q_{g_q}(\alpha_k) = Q_{g_q}(\alpha_k)^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uma matriz diagonal definida positiva HPPD $V_{g_v}(\alpha_k) = V_{g_v}(\alpha_k)^T \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$, e matrizes HPPD $X_{g_x}(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L_{g_l}(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$, $Y_{g_y}(\alpha_{k+1}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Z_{g_z}(\alpha_{k+1}) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ e $W_{g_w}(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$, $\forall \alpha_k \in \Lambda$, de tal forma que as LMIs*

$$\begin{bmatrix} X_{g_x}(\alpha_k) + X_{g_x}(\alpha_k)^T - Q_{g_q}(\alpha_k) & -W_{g_w}(\alpha_k)^T & X_{g_x}(\alpha_k)^T A(\alpha_k)^T \\ \star & V_{g_v}(\alpha_k) + V_{g_v}(\alpha_k)^T & -V_{g_v}(\alpha_k)^T B(\alpha_k)^T \\ \star & \star & Q_{g_q}(\alpha_k) - R(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \\ \star & \star & \star \\ & -L_{g_l}(\alpha_k)^T & \\ & \mathbf{0} & \\ & B(\alpha_k)Z_{g_z}(\alpha_{k+1}) - Y_{g_y}(\alpha_{k+1})^T & \\ & Z_{g_z}(\alpha_{k+1}) + Z_{g_z}(\alpha_{k+1})^T & \end{bmatrix} > 0, \quad (3.15)$$

$$\begin{bmatrix} -\rho_{(r)}^2 & L_{g_l}(\alpha_k)_{(r)} - W_{g_w}(\alpha_k)_{(r)} \\ \star & Q_{g_q}(\alpha_k) - X_{g_x}(\alpha_k) - X_{g_x}(\alpha_k)^T \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}, \quad (3.16)$$

com $R(\alpha_k, \alpha_{k+1}) = B(\alpha_k)Y_{g_y}(\alpha_{k+1}) + Y_{g_y}(\alpha_{k+1})^T B(\alpha_k)^T$, são satisfeitas para todo $\alpha_k \in \Lambda$ e $r = 1, \dots, n_u$. Então, os ganhos do controlador dependente de parâmetro

$$K(\alpha_k) = L_{g_l}(\alpha_k)X_{g_x}(\alpha_k)^{-1}, \quad (3.17)$$

com a lei de controle (3.5), estabilizam localmente o sistema em malha fechada (3.7) para todas as condições iniciais pertencentes ao conjunto $\mathcal{R}_\mathcal{E} = \mathcal{L}_\mathcal{V}(1)$.

Prova: Considere que a condição (3.15) seja satisfeita, o que assegura a positividade de $Q_{g_q}(\alpha_k)$ e a regularidade de $X_{g_x}(\alpha_k)$. Substitui-se $L_{g_l}(\alpha_k)$ e $W_{g_w}(\alpha_k)$ por $K(\alpha_k)X_{g_x}(\alpha_k)$ e $G(\alpha_k)X_{g_x}(\alpha_k)$, respectivamente, em (3.15), e usa-se o fato de que

$$\begin{aligned} (Q_{g_q}(\alpha_k) - X_{g_x}(\alpha_k))^T Q_{g_q}(\alpha_k)^{-1} (Q_{g_q}(\alpha_k) - X_{g_x}(\alpha_k)) &\geq 0 \Rightarrow \\ X_{g_x}(\alpha_k)^T Q_{g_q}(\alpha_k)^{-1} X_{g_x}(\alpha_k) &\geq X_{g_x}(\alpha_k) + X_{g_x}(\alpha_k)^T - Q_{g_q}(\alpha_k) \end{aligned} \quad (3.18)$$

pode ser usado para majorar o bloco (1,1) da desigualdade resultante, obtendo-se, para todo $\alpha_k \in \Lambda$,

$$\left[\begin{array}{ccc} X_{g_x}(\alpha_k)^T Q_{g_q}(\alpha_k)^{-1} X_{g_x}(\alpha_k) & -X_{g_x}(\alpha_k)^T G(\alpha_k)^T & X_{g_x}(\alpha_k)^T A(\alpha_k)^T \\ \star & V_{g_v}(\alpha_k) + V_{g_v}(\alpha_k)^T & -V_{g_v}(\alpha_k)^T B(\alpha_k)^T \\ \star & \star & Q_{g_q}(\alpha_{k+1}) - R_{g_y}(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \\ \star & \star & \star \\ & -X_{g_x}(\alpha_k)^T K(\alpha_k)^T & \\ & \mathbf{0} & \\ & B(\alpha_k) Z_{g_z}(\alpha_{k+1}) - Y_{g_y}(\alpha_{k+1})^T & \\ & Z_{g_z}(\alpha_{k+1}) + Z_{g_z}(\alpha_{k+1})^T & \end{array} \right] > 0. \quad (3.19)$$

Pré- e pós-multiplica a inequação (3.19) por

$$\left[\begin{array}{ccc} X_{g_x}(\alpha_k)^{-T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right]$$

e seu transposto, respectivamente, obtém-se

$$\left[\begin{array}{ccc} Q_{g_q}(\alpha_k)^{-1} & -G(\alpha_k)^T & A(\alpha_k)^T \\ \star & V_{g_v}(\alpha_k) + V_{g_v}(\alpha_k)^T & -V_{g_v}(\alpha_k)^T B(\alpha_k)^T \\ \star & \star & Q_{g_q}(\alpha_{k+1}) - R_{g_y}(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \\ \star & \star & \star \\ & -K(\alpha_k)^T & \\ & \mathbf{0} & \\ & B(\alpha_k) Z_{g_z}(\alpha_{k+1}) - Y_{g_y}(\alpha_{k+1})^T & \\ & Z_{g_z}(\alpha_{k+1}) + Z_{g_z}(\alpha_{k+1})^T & \end{array} \right] > 0, \quad (3.20)$$

o que evidencia a afirmativa de que $Q_{g_q}(\alpha_k)$ é uma matriz definida positiva, portanto, assegurando a positividade de $V(x_k, \alpha_k)$. As matrizes $Z_{g_z}(\alpha_k)$ e $V_{g_v}(\alpha_k)$ são matrizes regulares, ou seja, possuem inversa. Assim, seguindo os passos de Pandey & de Oliveira (2017), define-se $H(\alpha_k) = Z_{g_z}(\alpha_k)^{-T}$ e $F(\alpha_k) = Q_{g_q}(\alpha_k)^{-1} Y_{g_y}(\alpha_k)^T H(\alpha_k)$. Repassando essas variáveis na inequação (3.20) tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc} Q_{g_q}(\alpha_k)^{-1} & -G(\alpha_k)^T & A(\alpha_k)^T \\ \star & V_{g_v}(\alpha_k) + V_{g_v}(\alpha_k)^T & -V_{g_v}(\alpha_k)^T B(\alpha_k)^T \\ \star & \star & Q_{g_q}(\alpha_{k+1}) - \mathcal{R}(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \\ \star & \star & \star \\ & -K(\alpha_k)^T & \\ & \mathbf{0} & \\ & B(\alpha_k) H(\alpha_{k+1})^{-T} - Q_{g_q}(\alpha_{k+1}) F(\alpha_{k+1}) H(\alpha_{k+1})^{-1} & \\ & H(\alpha_{k+1})^{-1} + H(\alpha_{k+1})^{-T} & \end{array} \right] > 0, \quad (3.21)$$

em que

$$\mathcal{R}(\alpha_k, \alpha_{k+1}) = B(\alpha_k) H(\alpha_{k+1})^{-T} F(\alpha_{k+1})^T Q_{g_q}(\alpha_{k+1}) + Q_{g_q}(\alpha_{k+1}) F(\alpha_{k+1}) H(\alpha_{k+1})^{-1} B(\alpha_k)^T.$$

Em seguida, pré- e pós- multiplica-se a inequação (3.21) por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V_{g_v}(\alpha_k)^{-T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & H(\alpha_{k+1}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & Q_{g_q}(\alpha_{k+1})^{-1} & F(\alpha_{k+1}) \end{bmatrix}$$

e seu transposto, respectivamente e considere $S(\alpha_k) = V_{g_v}(\alpha_k)^{-1}$, devido a regularidade de $V_{g_v}(\alpha_k)$, assim

$$\begin{bmatrix} Q_{g_q}(\alpha_k)^{-1} & -G(\alpha_k)^T S(\alpha_k) & -K(\alpha_k)^T H(\alpha_{k+1})^T \\ \star & 2S(\alpha_k) & \mathbf{0} \\ \star & \star & H(\alpha_{k+1})^T + H(\alpha_{k+1}) \\ \star & \star & \star \\ & & A(\alpha_k)^T Q_{g_q}(\alpha_{k+1})^{-1} - K(\alpha_k)^T F(\alpha_{k+1})^T \\ & & -B(\alpha_k)^T Q_{g_q}(\alpha_{k+1})^{-1} \\ & & B(\alpha_k)^T Q_{g_q}(\alpha_{k+1})^{-1} + F(\alpha_{k+1})^T \\ & & Q_{g_q}(\alpha_{k+1})^{-1} \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \quad (3.22)$$

Posteriormente é necessário fazer uma transformação de congruência com

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & Q_{g_q}(\alpha_{k+1}) \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & K(\alpha_k)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

obtendo portanto

$$\begin{bmatrix} Q_{g_q}(\alpha_{k+1}) & \mathcal{A}_{cl}(\alpha_k) & -B(\alpha_k) \\ \star & Q_{g_q}(\alpha_k)^{-1} & -G(\alpha_k)^T S(\alpha_k) \\ \star & \star & 2S(\alpha_k) \end{bmatrix} > 0, \quad (3.23)$$

em que $\mathcal{A}_{cl}(\alpha_k)$ é a matriz dinâmica do sistema de malha fechada definida logo após a equação (3.7).

Aplica-se o complemento de Schur na inequação (3.23) e pré- e pós-multiplica-se o resultado pelo vetor $[x_k^T \quad \Psi(u_k)^T]$ e seu transposto, assim é possível escrever

$$x_{k+1}^T Q_{g_q}(\alpha_{k+1})^{-1} x_{k+1} - x_k^T Q_{g_q}(\alpha_k)^{-1} x_k - 2\Psi(u_k)^T S(\alpha_k) (\Psi(u_k) - G(\alpha_k)x_k) < 0. \quad (3.24)$$

Portanto, os sinais $u_k = K(\alpha_k)x_k$ e $v_k = G(\alpha_k)x_k$ com $x_k \in \mathcal{R}_\mathcal{E}$ pertencem ao conjunto \mathbb{S} (definido na equação (2.17)) e, assim, de acordo com o Lema 2.1 apresentado no capítulo anterior, tem-se $\Psi(u_k)^T S(\alpha_k) (\Psi(u_k) - G(\alpha_k)x_k) < 0$, assegurando que

$$\left(\max_{\alpha_k \in \Lambda} \lambda(Q_{g_q}(\alpha_k)) \right)^{-1} \|x_k\|_2^2 \leq V(x_k, \alpha_k) \leq \left(\min_{\alpha_k \in \Lambda} \lambda(Q_{g_q}(\alpha_k)) \right)^{-1} \|x_k\|_2^2$$

e que existe algum $\beta_3 > 0$ tal que $\Delta V(x_k, \alpha_k) \leq -\beta_3 \|x_k\|_2^2$, para todo $\alpha_k \in \Lambda$, com $\Delta V(x_k, \alpha_k) = x_{k+1}^T Q_{g_q}(\alpha_{k+1})^{-1} x_{k+1} - x_k^T Q_{g_q}(\alpha_k)^{-1} x_k$.

Após certificada a condição (3.15), é necessário também provar que as condições do Lema 2.1 são satisfeitas. Assim, assume-se que (3.16) é factível. Substitui-se $L_{g_l}(\alpha_k)$ por $K(\alpha_k)X_{g_x}(\alpha_k)$, $W_{g_w}(\alpha_k)$ por $G(\alpha_k)X_{g_x}(\alpha_k)$ e use o fato de que $X_{g_x}(\alpha_k)^T Q_{g_q}(\alpha_k)^{-1} X_{g_x}(\alpha_k) \geq X_{g_x}(\alpha_k)^T + X_{g_x}(\alpha_k) - Q_{g_q}(\alpha_k)$ para repassar no bloco (2,2) da inequação (3.16)

$$\begin{bmatrix} -\rho_{(r)}^2 & K(\alpha_k)_{(r)}X_{g_x}(\alpha_k) - G(\alpha_k)_{(r)}X_{g_x}(\alpha_k) \\ \star & -X_{g_x}(\alpha_k)^T Q_{g_q}(\alpha_k)^{-1} X_{g_x}(\alpha_k) \end{bmatrix} \leq 0, \quad (3.25)$$

para todo $\alpha_k \in \Lambda$ e $r = 1, \dots, n_u$. Posteriormente, pré- e pós-multiplica-se (3.25) por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & X_{g_x}(\alpha_k)^{-T} \end{bmatrix}$$

e sua transposta, respectivamente. Aplica-se o complemento de Schur no resultado e obtém-se

$$[K(\alpha_k)_{(r)} - G(\alpha_k)_{(r)}]^T \rho_{(r)}^{-2} [K(\alpha_k)_{(r)} - G(\alpha_k)_{(r)}] - Q_{g_q}(\alpha_k)^{-1} \leq 0$$

para todo $\alpha_k \in \Lambda$ e $r = 1, \dots, n_u$. Considere que $x_k \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}} = \mathcal{L}_{\mathcal{V}}(1)$, usando o Lema 3.1. Pré- e pós-multiplica-se a última inequação por x_k^T e seu transposto, respectivamente, obtém-se

$$x_k^T [K(\alpha_k)_{(r)} - G(\alpha_k)_{(r)}]^T \rho_{(r)}^{-2} [K(\alpha_k)_{(r)} - G(\alpha_k)_{(r)}] x_k \leq x_k^T Q_{g_q}(\alpha_k)^{-1} x_k < 1 \Rightarrow \left| [K(\alpha_k)_{(r)} - G(\alpha_k)_{(r)}] x_k \right| \leq \rho_{(r)},$$

para todo $\alpha_k \in \Lambda$ e $r = 1, \dots, n_u$. Consequentemente, o conjunto \mathbb{S} inclui o conjunto contrativo $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} = \mathcal{L}_{\mathcal{V}}(1)$ e atende as condições do Lema 3.1. Assim, a condição do setor é válida. Como resultado, o sistema LPV de malha fechada sujeito a atuadores saturantes (3.1)-(3.4) sob a lei de controle (3.5) com ganhos de realimentação de estado (3.17), tem suas trajetórias emanadas em $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ convergindo para a origem sem sair de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$. ■

3.3 Abordagem direta

A condição apresentada no próximo teorema é obtida utilizando uma abordagem com um número menor de variáveis de folga, mas permitindo igualmente a dependência do parâmetro da matriz de entrada $B(\alpha_k)$.

Teorema 3.2 *Considere o sistema discreto no tempo descrito em (3.1)-(3.4). Se existirem matrizes simétricas definidas positivas HPPD $Q_{g_q}(\alpha_k) = Q_{g_q}(\alpha_k)^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uma matriz diagonal definida positiva HPPD $V_{g_v}(\alpha_k) = V_{g_v}(\alpha_k)^T \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$, e matrizes HPPD $X_{g_x}(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L_{g_l}(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ e $W_{g_w}(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$, $\forall \alpha_k \in \Lambda$, de tal forma que as LMIs*

$$\begin{bmatrix} Q_{g_q}(\alpha_{k+1}) & A(\alpha_k)X_{g_x}(\alpha_k) + B(\alpha_k)L_{g_l}(\alpha_k) & -B(\alpha_k)V_{g_v}(\alpha_k) \\ \star & -Q_{g_q}(\alpha_k)^T + X_{g_x}(\alpha_k) + X_{g_x}(\alpha_k)^T & -W_{g_w}(\alpha_k)^T \\ \star & & \star & 2V_{g_v}(\alpha_k) \end{bmatrix} > 0, \quad (3.26)$$

$$\begin{bmatrix} -\rho_{(r)}^2 & L_{g_l}(\alpha_k)_{(r)} - W_{g_w}(\alpha_k)_{(r)} \\ \star & Q_{g_q}(\alpha_k) - X_{g_x}(\alpha_k) - X_{g_x}(\alpha_k)^T \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.27)$$

são satisfeitas para todo $\alpha_k \in \Lambda$ e $r = 1, \dots, n_u$. Então, a lei de controle dependente de parâmetro (3.5) com ganhos dados em (3.17) estabiliza localmente o sistema de malha fechada (3.7) para todas as condições iniciais pertencentes ao conjunto $\mathcal{R}_\varepsilon = \mathcal{L}_\mathcal{V}(1)$.

Prova: Supõe-se a factibilidade de (3.26). Assim, substitui-se $L_{g_l}(\alpha_k)$ e $W_{g_w}(\alpha_k)$ por $K(\alpha_k)X_{g_x}(\alpha_k)$ e $G(\alpha_k)X_{g_x}(\alpha_k)$, respectivamente. Use o mesmo fato dado em (3.18) para repassar no bloco (2,2) da inequação (3.26),

$$\begin{bmatrix} Q_{g_q}(\alpha_{k+1}) & A(\alpha_k)X_{g_x}(\alpha_k) + B(\alpha_k)K(\alpha_k)X_{g_x}(\alpha_k) & -B(\alpha_k)V_{g_v}(\alpha_k) \\ \star & X_{g_x}(\alpha_k)^T Q_{g_q}(\alpha_k)^{-1} X_{g_x}(\alpha_k) & -G(\alpha_k)^T X_{g_x}(\alpha_k)^T \\ \star & \star & 2V_{g_v}(\alpha_k) \end{bmatrix} > 0. \quad (3.28)$$

Pré- e pós-multiplica-se (3.28) por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & X_{g_x}(\alpha_k)^{-T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

e seu transposto, respectivamente, obtendo

$$\begin{bmatrix} Q_{g_q}(\alpha_{k+1}) & A(\alpha_k) + B(\alpha_k)K(\alpha_k) & -B(\alpha_k) \\ \star & Q_{g_q}(\alpha_k)^{-1} & -G(\alpha_k)^T V_{g_v}(\alpha_k)^{-1} \\ \star & \star & V_{g_v}(\alpha_k)^{-1} + V_{g_v}(\alpha_k)^{-T} \end{bmatrix} > 0. \quad (3.30)$$

Em seguida, aplica-se o complemento de Schur na inequação (3.30) e pré- e pós-multiplica-se o resultado obtido pelo vetor $[x_k^T \ \Psi(u_k)^T]$ e seu transposto, respectivamente, assim obtém-se a inequação (3.24). Desse ponto em diante, a prova segue os mesmos passos da prova do Teorema 3.1, inclusive a prova da LMI (3.27), completando a demonstração. \blacksquare

Vale ressaltar que as condições apresentadas neste capítulo valem para variações arbitrárias dos parâmetros variantes no tempo.

3.4 Complexidade numérica

A complexidade numérica das LMIs apresentadas nos teoremas 3.1 e 3.2 está relacionada ao número \mathcal{V} de variáveis de decisão escalares e ao número \mathcal{R} de linhas das LMI, em que

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= n \left(\frac{3n+1}{2} \right) \mathcal{J}(g) + n \left(\frac{n+1}{2} \right) + n(3n+2) \mathcal{J}(g), \\ \mathcal{V}_2 &= \mathcal{V}_1 - n(n+1) \mathcal{J}(g), \end{aligned} \quad (3.31)$$

representa o número de variáveis de decisão escalares para os teoremas 3.1 e 3.2, respectivamente,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &= \left[(2n + 2n_u) \frac{(N + g)}{(g + 1)} \mathcal{J}(g) + n_u(n + 1) + 3n \right] \mathcal{J}(g), \\ \mathcal{R}_2 &= \mathcal{R}_1 - n_u \left(\frac{N + g}{g + 1} \right) \mathcal{J}(g)^2,\end{aligned}\tag{3.32}$$

são o número de linhas das LMIs nos teoremas 3.1 e 3.2, respectivamente e $\mathcal{J}(g)$ é fornecido em (2.38). É interessante notar a presença de $\mathcal{J}(g)^2$ no número de linhas: esse termo vem da presença de matrizes em dois instantes diferentes, k e $k+1$, nas LMIs em (3.15) e (3.26). É claro que, em todos os casos, as condições apresentadas no Teorema 3.2 requerem menos esforço computacional do que as condições no Teorema 3.1. Essas relações são usadas posteriormente, na Seção 3.6, para ilustrar a diferença de complexidade entre esses dois casos.

3.5 Procedimento de otimização

As condições dos teoremas 3.1 e 3.2 fornecem possíveis soluções para o Problema 3.1. Entretanto, pode-se ir além e usar as condições desta seção para maximizar o tamanho da estimativa da região de atração. Esta maximização está associada ao problema da minimização do determinante das matrizes de Lyapunov ou, de forma mais simples, à minimização do traço das matrizes $Q(\alpha_k)^{-1}$, $\forall \alpha_k \in \Lambda$. Conforme argumentado por Tarbouriech *et al.* (2011), esse procedimento leva a elipsoides que tendem a ter dimensões mais homogêneas em todas as direções.

Neste trabalho, considera-se o procedimento de maximização de um elipsoide dado por $\mathcal{E}(H)$, $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$, interno aos elipsoides determinados por $\mathcal{E}(Q(\alpha_k)^{-1})$, $\forall \alpha_k \in \Lambda$. Ou seja, minimiza-se o traço de H sujeito a $H \geq Q(\alpha_k)^{-1}$. Assim, aplicando o complemento de Schur nessa última desigualdade, tem-se:

$$\mathcal{P}_H \equiv \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \text{trace}(H) \\ Q_{g_q}(\alpha_k), X_{g_x}(\alpha_k), \\ L_{g_l}(\alpha_k), Y_{g_y}(\alpha_k), Z_{g_z}(\alpha_k) \\ \text{sujeito a: (3.15)–(3.16) (Teorema 3.1)} \\ \text{ou} \\ \text{(3.26), (3.27) (Teorema 3.2), e} \\ \begin{bmatrix} Q_{g_q}(\alpha_k) & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & H \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall \alpha_k \in \Lambda. \end{array} \right. \tag{3.33}$$

3.6 Exemplos numéricos

Nesta seção, são ilustradas as condições apresentadas neste capítulo dadas por meio de experimentos numéricos. O objetivo é investigar o domínio de estabilização e o tamanho das estimativas regiões de atração alcançadas. Foram programadas as LMIs dos teoremas 3.1 e 3.2 com o parser ROLMIP (Aguilhari *et al.*, 2019), que permite inserir as LMIs da HPPD diretamente na forma em que aparecem nos teoremas. O solucionador SEDUMI (Sturm, 1999) é executado no MatLab para procurar as soluções. A proposta com os próximos exemplos são *i*) mostrar como aplicar as condições propostas aos sistemas LPV sujeitos a atuadores saturantes e *ii*) ilustrar como o aumento do grau das matrizes HPPD pode levar a estimativas da região de atração menos conservadoras.

3.6.1 Exemplo 1

O objetivo principal deste exemplo é mostrar a influência da estrutura polinomial empregada nas variáveis de decisão sobre o tamanho do conjunto $\mathcal{E}(Q_\gamma^{-1}, \mu)$. Assume-se $\mu = 1$ sem perda de generalidade.

Considere o sistema LPV (3.1) com matrizes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1,74 & 0,58 \\ 0,58 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1,16 & 0,58 \\ 0,58 & -0,58 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 3,6 \\ 0,6 \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

e $\rho = 1$.

Aplica-se o procedimento de otimização \mathcal{P}_H , dado por (3.33) com o Teorema 3.2, ao sistema considerado, maximizando assim o tamanho da estimativa região de atração por meio da inflação da elipsoide $x_k^T H x_k \leq 1$ que se encontra dentro do conjunto de níveis $\mathcal{L}_V(1)$.

Esse procedimento é executado para os cenários descritos na sequência, e a Figura 3.1 mostra os resultados alcançados.

1. Primeiramente é reproduzida a abordagem baseada na estabilidade quadrática com um ganho robusto de controle, ou seja, $K = LX^{-1}$. Assim, foi considerado $g = 0$ para todas as variáveis de decisão. A região de atração obtida é indicada pela **linha sólida vermelha** e corresponde, claramente, à menor estimativa da região de atração.
2. Depois é projetado um controlador robusto (portanto, com $g_l = g_x = 0$), mas com todas as outras variáveis de decisão com grau $g = 1$. A estimativa computada da região de atração é indicada por uma **linha sólida verde**, delimitando uma região que engloba a estimativa obtida no cenário anterior.
3. No último cenário, todas as variáveis de decisão foram colocadas com o mesmo grau g e o problema de otimização foi resolvido para $g \in \{1, 2, 3, 4\}$. As regiões de atração

obtidas são indicadas pelas linhas **tracejada azul** ($g = 1$), **pontilhada vermelha** ($g = 2$), **tracejada e pontilhada azul-claro** ($g = 3$) e **sólida preta** ($g = 4$). Esta última é a maior região obtida com base no procedimento realizado para diferentes valores de g testados.

Os testes realizados mostram que, como esperado, a abordagem da estabilidade quadrática produz uma estimativa região de atração mais conservadora (a mais interna das elipses na Figura 3.1). O controlador robusto projetado no segundo cenário permite melhorar a estimativa região de atração graças à candidata função de Lyapunov mais geral. O leitor pode observar que essa estimativa, indicada pela **linha sólida verde**, correspondente à interseção de dois conjuntos elipsoidais dados por $x_k^T Q_{10}^{-1} x_k \leq 1$ e $x_k^T Q_{01}^{-1} x_k \leq 1$. Então, como pode perceber, nos cenários 1 e 2 dizem respeito somente ao projeto de um controlador robusto.

Os ganhos do controlador dependente de parâmetros são calculados apenas no terceiro cenário, para quatro graus diferentes das matrizes HPPD. No primeiro caso, $g = 1$, a Figura 3.1 mostra a estimativa da região de atração pela **linha azul tracejada**. Observe que a candidata função de Lyapunov usada é a mesma que a do segundo cenário, mas a dependência de parâmetro das outras variáveis, especialmente o ganho de controle, produz uma estimativa maior. Assim, fica clara a vantagem de usar um ganho de controle dependente de parâmetro sobre o robusto. Na Figura 3.1, é possível perceber também que os casos em que todas as variáveis de decisão são definidas com $g = 2$ (**linha pontilhada vermelha**) até $g = 4$ (**sólida preta**) a região de atração pode ser aumentada às custas de um grau mais alto nas matrizes HPPD. No caso de $g = 1$, temos o ganho do controlador fornecido por

$$K(\alpha_k) = (\alpha_1 L_{10} + \alpha_2 L_{01}) (\alpha_1 X_{10} + \alpha_2 X_{01})^{-1}, \quad (3.35)$$

em que

$$L_{10} = [3,5478 \quad -11,9031], \quad L_{01} = [4,2270 \quad -6,8574],$$

e

$$X_{10} = \begin{bmatrix} 23,1737 & 35,9025 \\ 52,5419 & 191,0266 \end{bmatrix}, \quad X_{01} = \begin{bmatrix} 28,2401 & 47,9729 \\ 32,8195 & 141,8260 \end{bmatrix}.$$

Enquanto no caso de $g = 4$,

$$K(\alpha_k) = (\alpha_1^4 L_{40} + \alpha_1^3 \alpha_2 L_{31} + \alpha_1^2 \alpha_2^2 L_{22} + \alpha_1 \alpha_2^3 L_{13} + \alpha_2^4 L_{04}) \times (\alpha_1^4 X_{40} + \alpha_1^3 \alpha_2 X_{31} + \alpha_1^2 \alpha_2^2 X_{22} + \alpha_1 \alpha_2^3 X_{13} + \alpha_2^4 X_{04})^{-1}, \quad (3.36)$$

sendo que as matrizes usadas para calcular os ganhos $K(\alpha_k)$ são

$$L_{40} = [3,4618 \quad -13,4017], \quad L_{31} = [44,3822 \quad 27,0508], \quad L_{22} = [20,4062 \quad -70,8942],$$

$$L_{13} = [28,0257 \quad -16,8320], L_{04} = [4,2037 \quad -5,8549],$$

e

$$X_{40} = \begin{bmatrix} 53,2430 & 135,2541 \\ 150,8070 & 515,9314 \end{bmatrix}, X_{31} = \begin{bmatrix} 142,7506 & 322,1134 \\ 108,3686 & 621,4481 \end{bmatrix}, X_{22} = \begin{bmatrix} 100,7030 & 145,5360 \\ 112,7720 & 701,8516 \end{bmatrix},$$

$$X_{13} = \begin{bmatrix} 99,1580 & 145,4263 \\ 97,1600 & 455,6453 \end{bmatrix}, X_{04} = \begin{bmatrix} 51,9149 & 89,3369 \\ 77,4883 & 220,9183 \end{bmatrix}.$$

A Figura 3.1 também apresenta as trajetórias que se iniciam em pontos pertencentes às regiões de atração estimadas, e fora delas. O leitor pode observar que o conservadorismo da proposta diminui à medida que o grau das matrizes HPPD aumenta: as condições iniciais que levam a trajetórias instáveis estão mais próximas da fronteira da região $\mathcal{R}_\mathcal{E}$ obtida com $g = 4$, **linha sólida preta**, do que aquelas calculadas com graus mais baixos, confirmando as expectativas de que o aumento do grau polinomial reduz o conservadorismo da abordagem. As trajetórias convergentes de todas as condições iniciais são tomadas com base na região estimada por $g = 1$ (**linha azul tracejada**) e pela região estimada para $g = 4$ (**linha sólida preta**), confirmando que ambas regiões estimadas asseguram a estabilização para todas condições iniciais.

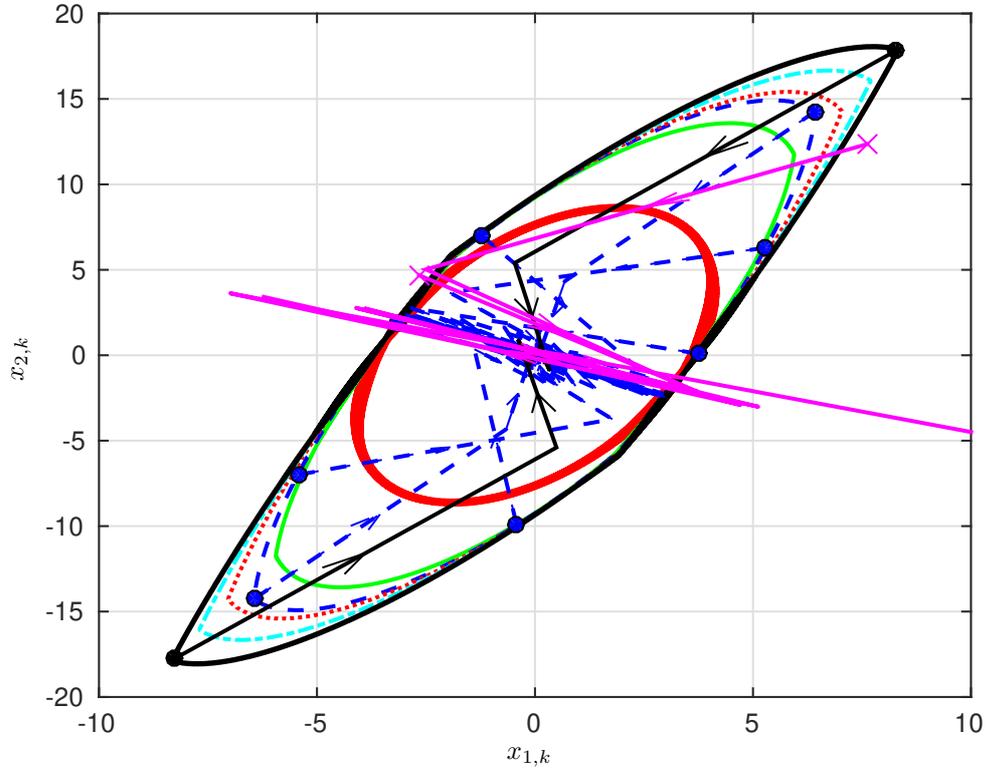


Figura 3.1: Estimativa região de atração para uma função de Lyapunov quadrática (linha sólida vermelha), ganho robusto (linha sólida verde), para matrizes polinomiais de graus 1 (linha tracejada azul), 2 (linha pontilhada vermelha), 3 (linha tracejada e pontilhada azul-claro), e grau 4 (linha sólida preta).

Em todas as simulações, o vetor de parâmetro variante no tempo, α_k , foi utilizado conforme é mostrado na parte superior da Figura 3.2.

O comportamento dos ganhos para a condição inicial $x_0 = [8,2754 \ 17,8186]$, localizado na borda da região calculada com $g = 4$, é apresentado na parte inferior da Figura 3.2. É interessante destacar o comportamento polinomial dos ganhos, especialmente para $k_2(\alpha_k)$ (linha tracejada vermelha).

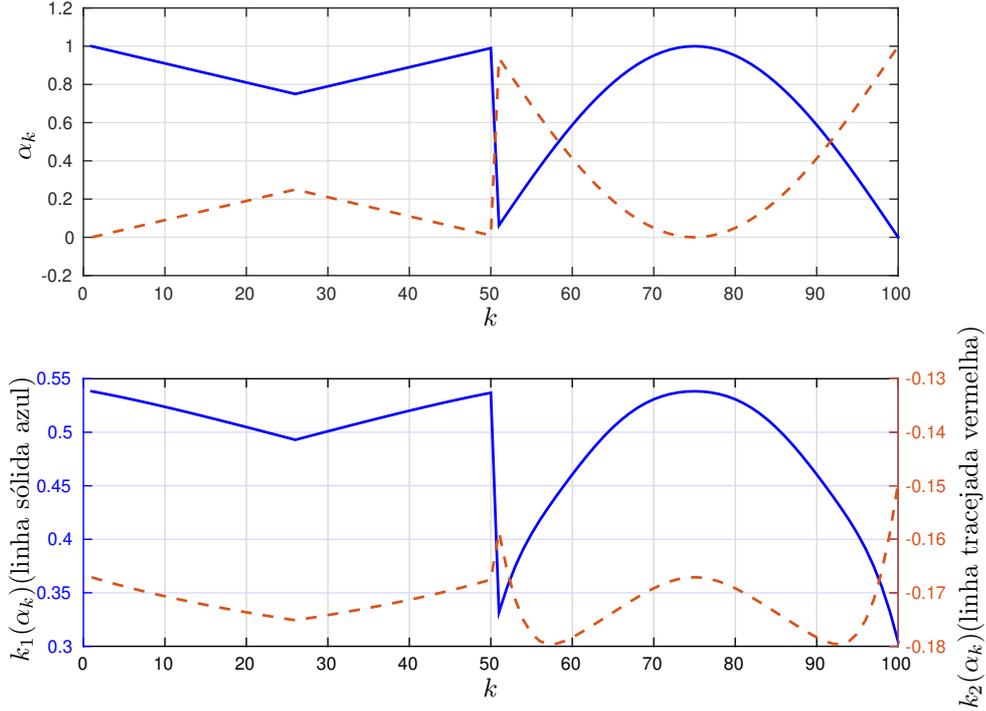


Figura 3.2: valores de α_k (parte superior) e ganhos $k_{1,k}$ (linha sólida azul) e $k_{2,k}$ (linha tracejada vermelha) para a condição inicial $x_0 = [8,2754 \ 17,8186]$ (parte inferior).

Os sinais de controle saturados das trajetórias apresentadas na Figura 3.1 são mostrados na Figura 3.3, para os casos convergentes na parte superior da figura e os instáveis que iniciam nos pontos marcados com \times , fora de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ na parte inferior.

3.6.2 Exemplo 2

Considere o sistema LPV discreto no tempo sujeito a atuadores saturantes (3.1) com $n = 4$, $N = 4$, e com as seguintes matrizes utilizadas em (Pandey & de Oliveira, 2017):

$$A_{\omega} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,25 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,8\omega & 0,5\omega & 0,2 & 0,03 - \omega \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{\beta} = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 1 - \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Os objetivos deste exemplo são:

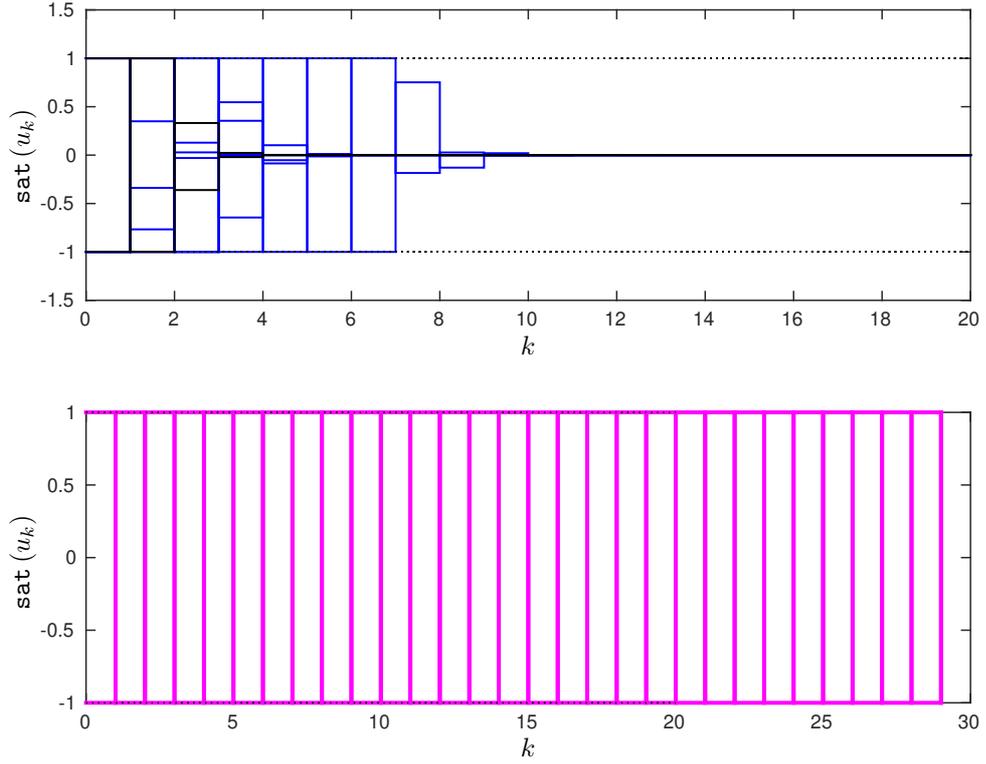


Figura 3.3: Sinal de controle para as trajetórias com condições iniciais dentro das regiões de atração da Figura 3.1 (superior) e para as trajetórias com as condições iniciais fora (inferior).

1. Encontrar o maior valor de $\omega > 0$, de modo que os teoremas 3.1 e 3.2 possam estabilizar o sistema de malha fechada com ganhos de realimentação de estado dependentes de parâmetro, com um limite de saturação $\rho = 1$;
2. Para um ω viável, maximizar o volume da região de atração através do procedimento de otimização \mathcal{P}_H fornecido em (3.33), com matrizes fornecidas em (3.37), $0 \leq \beta \leq 1$ e o limite de saturação também igual a $\rho = 1$.

Os teoremas 3.1 e 3.2 foram empregados com um algoritmo de bisseção simples para atingir o primeiro objetivo (a maximização de ω). A tabela 3.1 exibe, para diferentes graus g usados nas variáveis de decisão, os valores ω alcançados (colunas 2 e 3) e a proporção do número de variáveis ($\mathcal{V}_1/\mathcal{V}_2$, coluna 4) e número de linhas ($\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2$, coluna 5) exigidos pelos teoremas 3.1 e 3.2.

Quando não indicado explicitamente na Tabela 3.1, todas as variáveis de decisão têm o mesmo grau g , indicado na primeira coluna. Observe que, nas duas primeiras linhas, têm-se controladores robustos (independentes de parâmetros): na primeira, uma função quadrática de Lyapunov ($V(x_k) = x_k Q^{-1} x_k$) garante a estabilização e, na segunda linha, a função de Lyapunov é linear no parâmetro ($V(x_k) = x_k \sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} Q_i^{-1} x_k$).

Em relação ao segundo objetivo deste exemplo, a maximização de $\mathcal{R}_\mathcal{E}$, foi realizado

Tabela 3.1: Valores de ω obtidos com as condições propostas nos teoremas 3.1 e 3.2 para diferentes graus g empregado nas variáveis de decisão (colunas 2 e 3) e na proporção do número de variáveis (coluna 4) e linhas (coluna 5) entre os teoremas 3.1 e 3.2.

g	Teo3.1	Teo3.2	$\mathcal{V}_1/\mathcal{V}_2$	$\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2$
0 (Quadrático)	0,53	0,53	1,1111	1,0755
$g_l = g_x = 0,$ $g_q = g_s = g_v = g_z = g_y = 1$ (Robusto)	0,56	0,56	1,2222	1,0935
1	0,63	0,60	1,1333	1,0935
2	0,63	0,62	1,1389	1,1015
3	0,63	0,64	1,1408	1,1054
4	0,63	0,66	1,1417	1,1075

o procedimento de otimização \mathcal{P}_H para diferentes valores de ω e g com a finalidade de maximizar o volume de $\mathcal{R}_\mathcal{E}$. É importante ressaltar que as matrizes (3.37) são de ordem 4, isto é, estão em um espaço quadridimensional, portanto, o volume dado por $\mathcal{R}_\mathcal{E} = \mathcal{L}_\mathcal{V}(1)$ foi aproximado pelo volume de H que é inflado dentro de uma região, e tem $\text{Vol}(H)$ proporcional a $1/\sqrt{\det(H)}$. Embora essa maneira de calcular o volume leve a uma estimativa conservadora do volume real da região de interseção estimada, ainda fornece uma boa visão geral do tamanho do volume calculado por cada método de projeto do controlador.

A Figura 3.4 ilustra a relação do volume obtido da matriz H , cujo volume é maximizado no procedimento de otimização \mathcal{P}_H em função de ω para o Teorema 3.1 (parte superior esquerda) e Teorema 3.2 (parte inferior esquerda).

A Figura 3.4 mostra que, para o mesmo valor de ω , o volume atingido é geralmente mais alto ao usar o Teorema 3.2 do que o Teorema 3.1. Como já mencionado, a exceção permanece no grau $g = 1$, onde para $\omega \geq 0.59$, a condição apresentada no Teorema 3.1 atinge maiores estimativas de $\mathcal{R}_\mathcal{E}$. Pode-se entender essa relação olhando para o lado direito da Figura 3.4, em que é apresentado a razão entre os volumes de H calculados pelo procedimento de otimização \mathcal{P}_H com o Teorema 3.2 e Teorema 3.1. Sempre que essa relação for maior que 1, significa que o uso do Teorema 3.2 supera o uso do Teorema 3.1. É claro que, na maioria dos casos, o Teorema 3.2 provê melhores resultados que o

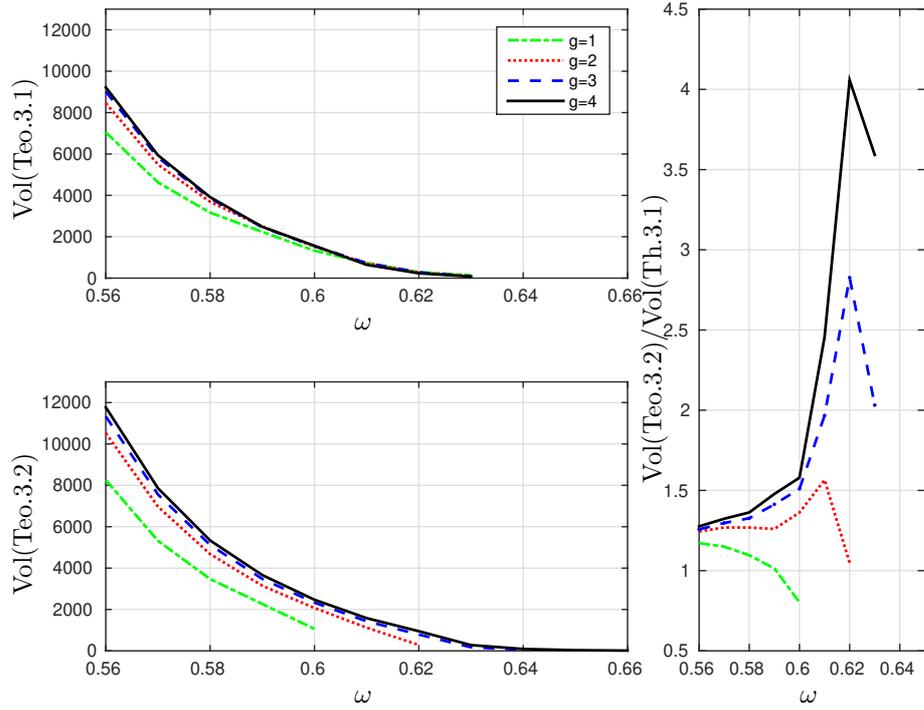


Figura 3.4: Comparação de ω pelo volume para diferentes graus das matrizes das condições 3.1 (parte superior esquerda) e 3.2 (parte inferior esquerda); e a proporção $\text{Vol}(\text{Teo.3.2})/\text{Vol}(\text{Teo.3.1})$ (à direita) para o mesmo intervalo de viabilidade sendo $g = 1$ (linha pontilhada e tracejada), $g = 2$ (linha pontilhada), $g = 3$ (linha tracejada), e $g = 4$ (linha sólida).

Teorema 3.1. Além disso, percebe-se que, próximo aos limites de factibilidade de cada condição, esse desempenho diminui.

3.7 Considerações finais

Neste capítulo foram propostas duas novas condições convexas para projetar controladores dependentes de parâmetros que estabilizam localmente sistemas LPV de tempo discreto sujeitos a atuadores saturantes. Essas abordagens permitem calcular uma lei de controle por realimentação de estado, que pode ter uma dependência racional do parâmetro variante no tempo, usando matrizes HPPD. Além disso, foi estabelecida uma condição geral para calcular uma estimativa da região de atração por um conjunto finito de desigualdades, dependendo das matrizes de Lyapunov HPPD. Por meio de dois exemplos numéricos, ilustrou-se a eficiência das condições propostas e que foram comparadas com base no domínio da estabilização, complexidade numérica e volume da região de atração estimada. Com base nos resultados desses exemplos foi possível concluir que as condições provindas da abordagem direta apresentou melhores resultados. Além disso, foi mais fácil encontrar sistemas nos quais o Teorema (3.2) funcionava do que o Teorema (3.1).

Abordagem poliquadrática

Neste capítulo é apresentado um corolário do Teorema 3.1, apresentado no capítulo anterior, para o caso de polinômio homogêneo de grau unitário, ou seja, para um polinômio com dependência linear nos parâmetros. Esse resultado pode ser visto como uma extensão do trabalho de Pandey & de Oliveira (2017) para o caso com saturação de atuadores. Portanto, o método proposto visa a busca de uma função de Lyapunov linear nos parâmetros atendendo à classificação de função poliquadrática proposta por Daafouz & Bernussou (2001). A estabilidade local é utilizada para caracterizar uma estimativa da região de atração do sistema. Na primeira seção deste capítulo são apresentados dois exemplos numéricos para ilustrar o principal resultado.

Em seguida, é proposta uma extensão dos resultados para um caso de particular interesse, por exemplo em processos industriais: o projeto de um controlador com capacidade para rastreamento de referência. Neste caso, é considerado um controlador LPV com ação proporcional aos estados e ação integral sobre o erro de rastreamento, ambos com ganhos dependentes de parâmetros. Além disso, essa nova condição pode garantir o desempenho do sistema LPV de malha fechada com uma taxa de contratividade da função de Lyapunov, o que reflete na taxa de convergência da malha fechada. O controlador dependente de parâmetros e com ação integral é utilizado em dois ensaios: um para rastreamento de referência e outro para regulação em torno de um determinado ponto de ajuste. Deve-se ressaltar que o seguimento de referência implica no estudo de tolerância ao sinal exógeno (ou ao distúrbio) (Lopes *et al.*, 2020). Isto, pois a variação do sinal de referência pode implicar em excursionamentos que eventualmente levem a trajetória dos estados do sistema em malha fechada a escapar da região de atração. Entretanto, neste trabalho a estimativa de variação do sinal de referência é feita por meio de simulações numéricas, com a verificação a posteriori das trajetórias de malha fechada. Maiores detalhes são apresentados nos estudos realizados.

A proposta de projeto de controlador para rastreamento de sinal de referência é em-

pregada para controle de nível em um sistema de tanques disponível no Laboratório de Sinais e Sistemas situado no CEFET-MG, campus Divinópolis. Primeiramente, é realizada a modelagem física do sistema como um sistema *quasi*-LPV e, posteriormente, a realização de testes experimentais com o controlador projetado, que podem ser vistos na terceira seção deste capítulo.

Para facilitar a leitura, é descrito novamente o sistema linear discreto com parâmetros variantes no tempo e sujeito a atuadores saturantes,

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + B(\alpha_k)\text{sat}(u_k), \quad (4.1)$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ o vetor de sinais de controle lineares e as matrizes $A(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ pertencem ao politopo dado pela combinação convexa de N vértices conhecidos dado em (3.2) com $\alpha_k \in \Lambda$.

O vetor de parâmetros variantes no tempo, α_k , está disponível em tempo real permitindo o uso da lei de controle

$$u_k = K(\alpha_k)x_k, \quad (4.2)$$

em que $K(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ é um ganho LPV localmente estabilizante,

$$K(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} K_i, \quad (4.3)$$

e os valores de $K_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ devem ser determinados.

O termo $\text{sat}(u_k)$ é tratado por meio da função zona morta, $\Psi(u_k)$, dada em (3.6). Portanto, o sistema (4.1) em malha fechada pode ser escrito como:

$$x_{k+1} = \mathcal{A}_{cl}(\alpha_k)x_k - B(\alpha_k)\Psi\left(K(\alpha_k)x_k\right), \quad (4.4)$$

em que $\mathcal{A}_{cl}(\alpha_k) = A(\alpha_k) + B(\alpha_k)K(\alpha_k)$.

Conforme discutido no capítulo anterior, busca-se determinar $K(\alpha_k)$ que resulte em uma $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$, em geral a maior possível, tal que $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$. Como feito anteriormente, na subseção 3.1.2, a estimativa de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ utiliza um conjunto de nível associado à função de Lyapunov associada ao sistema em malha fechada.

A estabilização do sistema (4.1) com atuadores saturantes é investigada por meio de uma candidata à função de Lyapunov quadrática nos estados e dependente do parâmetro variante no tempo, dada por:

$$V(x_k, \alpha_k) = x_k^T P(\alpha_k) x_k, \quad (4.5)$$

$$P(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} P_i > 0. \quad (4.6)$$

A definição de estabilidade poliquadrática proposta por Daafouz & Bernussou (2001) pode ser adaptada para o caso local conforme segue:

Definição 4.1 *O sistema (4.4) é localmente poliquadraticamente estável se existe uma função de Lyapunov quadrática nos estados e dependente de parâmetros na forma dada em (4.5)-(4.6) para $x_k \in \mathcal{R}_\mathcal{E}$.*

Cabe destacar que em (Daafouz & Bernussou, 2001) o sistema dependente de parâmetro tratado não admite parâmetros variantes na matriz $B(\alpha_k)$. Entretanto, na extensão proposta recentemente por Pandey & de Oliveira (2017), as condições de análise e síntese de controladores passam a admitir que essa matriz tenha dependência paramétrica.

O conjunto de nível associado à função de Lyapunov pode ser definido no Lema 3.1 considerando $g = 1$. Dessa forma, o conjunto de nível $\mathcal{L}_\mathcal{V}(\mu)$ é calculado como em (Jungers & Castelan, 2011), ou seja:

$$\mathcal{L}_\mathcal{V}(\mu) = \bigcap_{i=1}^N \mathcal{E}(P_i, \mu). \quad (4.7)$$

4.1 Condições para estabilização

O projeto de controlador para o sistema (4.1) é realizado baseado na nova condição de estabilização poliquadrática proposta por Pandey & de Oliveira (2017), em que pode-se admitir parâmetros variantes no tempo na matriz $B(\alpha_k)$ e variações arbitrárias dos parâmetros, conforme apresenta no corolário a seguir:

Corolário 4.1 *Considere o sistema discreto no tempo descrito em (4.1). Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $X_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$, $Y_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$, $Z_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$, $W_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$, $i, j = 1, \dots, N$, e uma matriz definida positiva diagonal $V_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ de tal forma que as LMIs*

$$\begin{bmatrix} X_i + X_i^T - Q_i & -W_i^T & X_i^T A_i^T & -L_i^T \\ \star & V_i + V_i^T & -V_i^T B_i^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & Q_j - R_{ij} & B_i Z_j - Y_j^T \\ \star & \star & \star & Z_j + Z_j^T \end{bmatrix} > 0 \quad (4.8)$$

$$\begin{bmatrix} -\rho_{(r)}^2 & L_{i(r)} - W_{i(r)} \\ \star & Q_i - X_i - X_i^T \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.9)$$

sejam satisfeitas, com $R_{ij} = B_i Y_j + Y_j^T B_i^T$, para todo $i, j = 1, \dots, N$, e $r = 1, \dots, n_u$, então, o sinal de controle (4.2) cujos ganhos do controlador dados por

$$K_i = L_i X_i^{-1} \quad (4.10)$$

estabilizam local e poliquadraticamente o sistema, e asseguram que as trajetórias do sistema em malha fechada iniciadas no conjunto $\mathcal{R}_\mathcal{E}$ convergem para a origem dentro do seu domínio, considerando $\mathcal{R}_\mathcal{E} = \mathcal{L}_\mathcal{V}(1)$ e $P_i = Q_i^{-1}$, $i = 1, \dots, N$.

A prova deste corolário segue os mesmos passos da prova do Teorema 3.1, porém com as matrizes dadas em i e j . É importante ressaltar que não é possível obter a prova desse corolário diretamente da prova do Teorema 3.1 devido aos produtos existentes nas condições, deixando as inequações não convexas.

Prova: Assuma que a condição (4.8) seja satisfeita, o que assegura a positividade Q_i e a regularidade de X_i . Substitui-se L_i e W_i por $K_i X_i$ e $G_i X_i$, respectivamente, em (4.8),

$$\begin{bmatrix} X_i + X_i^T - Q_i & -X_i^T G_i^T & X_i^T A_i^T & -X_i^T K_i^T \\ \star & V_i + V_i^T & -V_i^T B_i^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & Q_j - R_{ij} & B_i Z_j - Y_j^T \\ \star & \star & \star & Z_j + Z_j^T \end{bmatrix} > 0. \quad (4.11)$$

Utiliza-se o fato de que

$$X_i^T Q_i^{-1} X_i \geq X_i + X_i^T - Q_i \quad (4.12)$$

para majorar o bloco (1,1) da desigualdade (4.11), assim

$$\begin{bmatrix} X_i^T Q_i^{-1} X_i & -X_i^T G_i^T & X_i^T A_i^T & -X_i^T K_i^T \\ \star & V_i + V_i^T & -V_i^T B_i^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & Q_j - R_{ij} & B_i Z_j - Y_j^T \\ \star & \star & \star & Z_j + Z_j^T \end{bmatrix} > 0. \quad (4.13)$$

Pré- e pós-multiplica-se a inequação (4.13) por

$$\begin{bmatrix} X_i^{-T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

e sua transposta, respectivamente, e definindo $P_i = Q_i^{-1}$, $H_i = Z_i^{-T}$ e $F_i = P_i Y_i^T H_i$, obtém-se para todo $i, j = 1, \dots, N$,

$$\begin{bmatrix} P_i & -G_i^T & A_i^T & -K_i^T \\ \star & V_i + V_i^T & -V_i^T B_i^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & P_j^{-1} - R_{ij} & B_i H_j^{-T} - P_j^{-1} F_j H_j^{-1} \\ \star & \star & \star & H_j^{-1} + H_j^{-T} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.14)$$

sendo $R_{ij} = B_i H_j^{-T} F_j^T P_j^{-1} + P_j^{-1} F_j H_j^{-1} B_i^T$, para todo $i, j = 1, \dots, N$.

Pré- e pós-multiplicando-se a inequação (4.14) por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V_i^{-T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & H_j \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_j & F_j \end{bmatrix}$$

e sua transposta, respectivamente, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} P_i & -G_i^T V_i^{-1} & -K_i^T H_j^T & A_i^T P_j - K_i^T F_j^T \\ \star & V_i^{-T} + V_i^{-1} & \mathbf{0} & -B_i^T P_j \\ \star & \star & H_j^T + H_j & B_i^T P_j + F_j^T \\ \star & \star & \star & P_j \end{bmatrix} > 0 \quad (4.15)$$

para todo $i, j = 1, \dots, N$. Uma vez que a matriz V_i é não singular devido ao bloco (2,2) de (4.15), define-se $S_i = V_i^{-1}$. Em seguida, multiplica-se (4.15) por $\alpha_i, \alpha_j, \alpha \in \Lambda$, e faz-se o somatório em $i, j = 1, \dots, N$.

$$\begin{bmatrix} P(\alpha_k) & -G(\alpha_k)^T S(\alpha_k) & -K(\alpha_k)^T H(\alpha_{k+1})^T \\ \star & 2S(\alpha_k) & \mathbf{0} \\ \star & \star & H(\alpha_{k+1})^T + H(\alpha_{k+1}) \\ \star & \star & \star \\ A(\alpha_k)^T P(\alpha_{k+1}) - K(\alpha_k)^T F(\alpha_{k+1})^T & & \\ -B(\alpha_k)^T P(\alpha_{k+1}) & & \\ B(\alpha_k)^T P(\alpha_{k+1}) + F(\alpha_{k+1})^T & & \\ P(\alpha_{k+1}) & & \end{bmatrix} > 0. \quad (4.16)$$

Pré- e pós-multiplicando-se a inequação (4.16) por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & P(\alpha(k+1))^{-1} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & K(\alpha_k)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

e sua transposta, respectivamente, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} P(\alpha_{k+1})^{-1} & \mathcal{A}_{cl}(\alpha_k) & -B(\alpha_k) \\ \star & P(\alpha_k) & -G(\alpha_k)^T S(\alpha_k) \\ \star & \star & 2S(\alpha_k) \end{bmatrix} > 0, \quad (4.17)$$

em que $\mathcal{A}_{cl}(\alpha_k)$ é definida após (4.4), $P(\alpha_k)$ é dada em (4.6), $K(\alpha_k)$ em (4.3) e $G(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} G_i$.

Aplicando o complemento de Schur em (4.17), tem-se

$$\begin{bmatrix} P(\alpha_k) & -G(\alpha_k)^T S(\alpha_k) \\ \star & 2S(\alpha_k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{cl}(\alpha_k)^T \\ -B(\alpha_k)^T \end{bmatrix}^T P(\alpha_{k+1}) \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{cl}(\alpha_k) & -B(\alpha_k) \end{bmatrix} > 0, \quad (4.18)$$

pré- e pós-multiplicando-se (4.18) pelo vetor $[x(k)^T \quad \Psi(k)^T]$ e seu transposto e usando (4.4), tem-se

$$\begin{aligned} x_{k+1}^T P(\alpha_{k+1}) x_{k+1} - x_k^T P(\alpha_k) x_k \\ - 2\Psi(K(\alpha_k)x_k)^T S(\alpha_k) \left(\Psi(K(\alpha_k)x_k) - G(\alpha_k)x_k \right) < 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Sabe-se que $u_k = K(\alpha_k)x_k$ e $v_k = G(\alpha_k)x_k$, sendo assim, suponha que $x_k \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ de forma que os sinais u_k e v_k pertençam ao conjunto \mathbb{S} dado em (2.17). Nesse caso a condição de setor é verificada, isto é, $\Psi(K(\alpha_k)x_k)^T S(\alpha_k) \left(\Psi(K(\alpha_k)x_k) - G(\alpha_k)x_k \right) < 0$. Portanto a diferença da função de Lyapunov, $\Delta V(x_k, \alpha_k) = x_{k+1}^T P(\alpha_{k+1}) x_{k+1} - x_k^T P(\alpha_k) x_k$ é

$$\Delta V(x_k, \alpha_k) < 2\Psi(K(\alpha_k)x_k)^T S(\alpha_k) \left(\Psi(K(\alpha_k)x_k) - G(\alpha_k)x_k \right).$$

Portanto, se a condição de setor e a condição (4.8) são verificadas, implica na positividade da função dada por (4.5) e na negatividade de $\Delta V(x_k, \alpha_k)$ com funções classe \mathcal{K}

dadas por $\beta_1(\|x_k\|) \leq V(x_k, \alpha_k) \leq \beta_2(\|x_k\|)$ e $\Delta V(x_k, \alpha_k) \leq -\beta_3(\|x_k\|) < 0$, em que

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \min_{i=1, \dots, N} \lambda_{\min} P_i \|x_k\|_2^2, \\ \beta_2 &= \max_{i=1, \dots, N} \lambda_{\max} P_i \|x_k\|_2^2, \\ \beta_3 &> 0.\end{aligned}\tag{4.20}$$

Resta demonstrar que a condição de setor é de fato assegurada. A condição (4.9) assegura a inclusão do conjunto de nível contrativo dado pela função de Lyapunov em \mathbb{S} . Assumindo a factibilidade de (4.9), substitui-se L_i por $K_i X_i$, W_i por $G_i X_i$ e usa-se o fato dado em (4.12) para obter:

$$\begin{bmatrix} -\rho_{(r)}^2 & K_{i(r)} X_i - G_{i(r)} X_i \\ \star & -X_i^T Q_i^{-1} X_i \end{bmatrix} \leq 0\tag{4.21}$$

para todo $i = 1, \dots, N$ e $r = 1, \dots, n_u$. Pré- e pós-multiplicando-se (4.21) por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & X_i^{-T} \end{bmatrix}\tag{4.22}$$

e seu transposto, e definindo $P_i = Q_i^{-1}$, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} -\rho_{(r)}^2 & K_{i(r)} - G_{i(r)} \\ \star & -P_i \end{bmatrix} \leq 0.\tag{4.23}$$

para todo $i = 1, \dots, N$ e $r = 1, \dots, n_u$.

Multiplicando-se (4.23) por α_i , somando-se em $i = 1, \dots, N$, e aplicando-se o complemento de Schur no resultado, tem-se

$$\Theta_{(r)}^T \rho_{(r)}^{-2} \Theta_{(r)} - P(\alpha_k) \leq 0\tag{4.24}$$

com $\Theta_{(r)} = K(\alpha_k)_{(r)} - G(\alpha_k)_{(r)}$, para todo $\alpha_k \in \Lambda$ e $r = 1, \dots, n_u$. Finalmente, pré- e pós-multiplicando-se (4.24) por x_k^T e seu transposto,

$$x_k^T \Theta_{(r)}^T \rho_{(r)}^{-2} \Theta_{(r)} x_k - x_k^T P(\alpha_k) x_k \leq 0\tag{4.25}$$

para todo $\alpha_k \in \Lambda$ e $r = 1, \dots, n_u$. Assim,

$$x_k^T \Theta_{(r)}^T \Theta_{(r)} x_k \leq \rho_{(r)}^2 x_k^T P(\alpha_k) x_k,\tag{4.26}$$

como x_k foi escolhido tal que $x_k \in \mathcal{L}_\nu(1)$, tem-se que $x_k^T P(\alpha_k) x_k \leq 1$ e portanto

$$x_k^T \Theta_{(r)}^T \Theta_{(r)} x_k \leq \rho_{(r)}^2 x_k^T P(\alpha_k) x_k \leq \rho_{(r)}^2,\tag{4.27}$$

o que assegura $x_k^T \Theta_{(r)}^T \Theta_{(r)} x_k \leq \rho_{(r)}^2$, que é equivalente a $|(K(\alpha_k) - G(\alpha_k))x_k|^2 = |u_k - v_k|^2 \leq \rho_{(r)}^2$ e portanto $|u_k - v_k| \leq \rho_{(r)}$, assegurando que os sinais u_k e v_k pertencem ao conjunto \mathbb{S} , satisfazendo assim a condição generalizada de setor. ■

Utilizando as condições de estabilização local poliquadrática, é possível também encontrar um ganho robusto para garantir a estabilidade do sistema (4.1) com atuadores saturantes, conforme o corolário a seguir.

Corolário 4.2 *Se as condições (4.8) e (4.9) forem satisfeitas com $L_i = L$, $X_i = X$, $i = 1, \dots, N$, então a lei de controle $u_k = Kx_k$ estabiliza local e poliquadraticamente o sistema discreto no tempo descrito em (4.1) com $K = LX^{-1}$.*

A prova deste corolário segue os mesmos passos que a prova do Corolário (4.1), fazendo apenas as modificações especificadas.

Note que tanto para o Corolário 4.1 quanto para o Corolário 4.2 é possível utilizar uma candidata a função de Lyapunov quadrática nos estados para a estabilização do sistema (4.1) que seja independente de parâmetros variantes no tempo, isto é, $V(x_k) = x_k^T P x_k$. Neste caso, basta fazer $P = Q_i^{-1} = Q^{-1}$, $i = 1, \dots, N$, em ambos os casos.

4.1.1 Procedimento de otimização

Nesta seção, é proposto o seguinte procedimento convexo para a maximização do tamanho de um elipsoide dado por $\mathcal{E}(H)$, $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$, interno aos elipsoides determinados por $\mathcal{E}(P_i)$, $i = 1, \dots, N$. Ou seja, minimiza-se o traço de H sujeito a $H \geq P_i$. Assim, aplicando o complemento de Schur nessa última desigualdade e usando $Q_i = P_i^{-1}$, tem-se:

$$Q_H \equiv \begin{cases} \min_{Q_i, X_i, L_i, Y_i, Z_i} & \text{traço}(H) \\ \text{sujeito a:} & \text{LMIs (4.8), (4.9) e} \\ & \begin{bmatrix} Q_i & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & H \end{bmatrix} \geq 0, i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (4.28)$$

4.1.2 Exemplos numéricos

Nesta parte, ilustra-se a contribuição apresentada nesta seção. São investigados dois exemplos numéricos, o primeiro extraído de (Bertolin *et al.*, 2018) e o outro adaptado de (Oliveira *et al.*, 2009), em que originalmente o objetivo era verificar a estabilização sem restrições de amplitude nos atuadores. Nos exemplos que seguem, o limite de saturação simétrico é considerado $\rho = 1$.

Exemplo 1: Considere o sistema (4.1) com $n = 2$, $N = 2$ e matrizes dadas por (Bertolin *et al.*, 2018):

$$A_1 = \gamma \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \gamma \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Primeiramente, é investigado o maior valor de $\gamma > 0$ tal que o sistema (4.1) com matrizes dadas em (4.29) pode ser estabilizado por meio da lei de controle (4.2) em duas situações:

1. Usando um ganho robusto, isto é, $K(\alpha_k) = K$, para todo $k \geq 0$, ou seja, aplicando as condições propostas do Corolário 4.2;

2. Usando o ganho dependente de parâmetros (4.3), isto é, aplicando o Corolário 4.1.

É também verificado o maior valor de $\gamma > 0$ em que o sistema (4.29) pode ser estabilizado usando o conceito de estabilidade quadrática, isto é $P(\alpha_k) = P$. Para isto, também podem ser utilizada tanto uma lei de controle usando um ganho robusto quanto uma poliquadrática, portanto com um ganho dependente de parâmetros (4.3). Para todos esses casos, utiliza-se o procedimento de otimização \mathcal{Q}_H dado em (4.28). Os resultados obtidos podem ser visualizados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Valores de $\gamma > 0$ para a estabilização do Sistema 4.29.

Estabilidade	Ganho Robusto	Ganho LPV
Poliquadrática	0,3273	1,4900
Quadrática	0,3272	0,8890

Portanto, para o caso poliquadrático o controlador do tipo LPV consegue estabilizar o sistema sob saturação para valores de γ que são maiores que 4,55 vezes o máximo estabilizável por um ganho robusto. Além disso, quando se utiliza estabilidade poliquadrática obtém-se um valor de γ maior em comparação com a estabilidade quadrática.

Fixando $\gamma = 0,45$ e resolvendo o procedimento de otimização (4.28) com ganhos LPV, são obtidos os ganhos $K_1 = [0,8839 \ 0,2701]$ e $K_2 = -[0,5847 \ 0,8768]$, e pode ser determinada uma estimativa da região de atração. Os resultados obtidos são ilustrados na Figura 4.1 em que são mostrados os conjuntos elipsoidais $\mathcal{E}(P_1)$, $\mathcal{E}(P_2)$ e $\mathcal{E}(H)$, este em linha pontilhada. Note que o conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(H)$ fornece uma aproximação interna da interseção dos conjuntos $\mathcal{E}(P_1)$ e $\mathcal{E}(P_2)$.

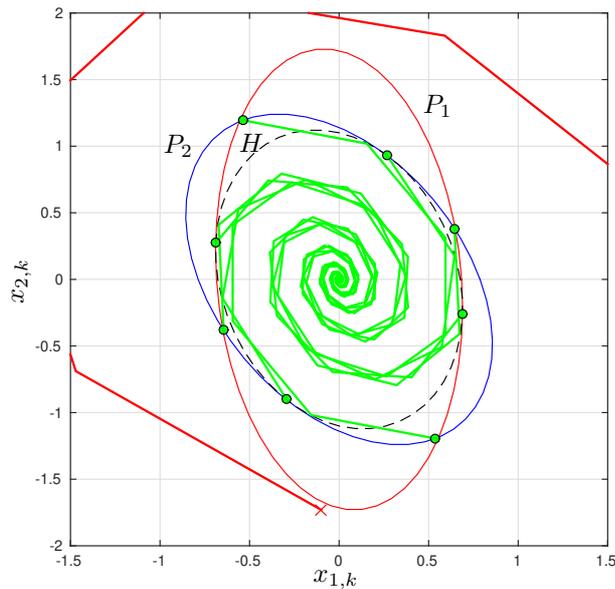


Figura 4.1: \mathcal{L}_V e a trajetória das condições iniciais para o Exemplo 1.

São selecionadas 8 condições iniciais, marcadas com \circ , sobre a borda da região determinada pela interseção dos elipsoides $\mathcal{E}(P_1)$ e $\mathcal{E}(P_2)$ para as quais a trajetória do sistema sob saturação convergem, como esperado, para a origem. Uma trajetória externa à região de condições iniciais e bem próxima à região delimitada pelo elipsoide $\mathcal{E}(P_1)$ é também escolhida, marcada com \times , ficando clara a divergência da trajetória em relação à origem.

Os sinais de controle de cada uma dessas trajetórias são mostrados na Figura 4.2, em que fica evidente a saturação do sinal de controle e, no caso da trajetória divergente, a insuficiência de esforço de controle para levar a trajetória para a origem.

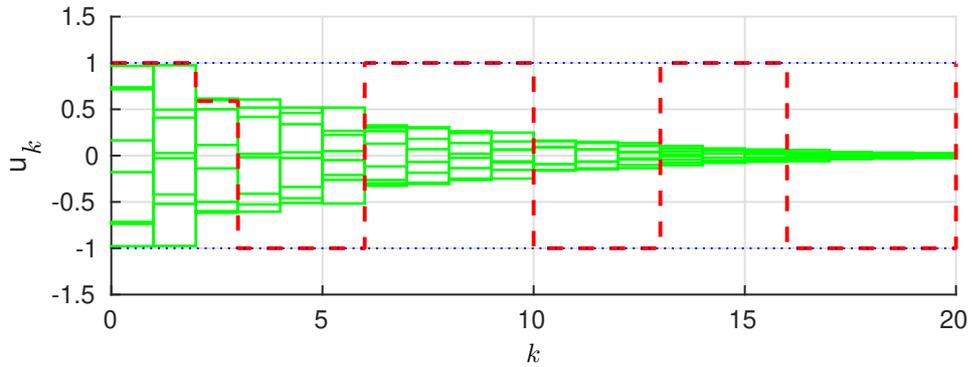


Figura 4.2: Sinal de controle para o Exemplo 1.

Em todos os casos, os valores de α_k utilizados são mostrados na Figura 4.3, parte superior. Na parte inferior dessa mesma figura, são mostrados os ganhos de $K(\alpha_k)$ para a condição inicial $x_0 = -[0,2925 \ 0,9017]^T$. Observa-se que na Figura 4.3 os ganhos variam da mesma forma que o α_k , pois $K(\alpha_k)$ é linear em α (função homogênea de grau 1), o que contrasta com o obtido no Capítulo 3, Figura 3.2, em que os ganhos variam polinomialmente com α_k .

Exemplo 2: Considere o sistema com $n = 3$, $N = 2$ e matrizes adaptadas de Oliveira *et al.* (2009):

$$A_1 = \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Como no exemplo anterior, busca-se o maior valor de γ para o qual o sistema (4.1) é localmente estabilizável. Utilizando o ganho robusto, isto é, $K(\alpha_k) = K$ para todo α_k foi aplicado o procedimento de otimização (4.28) e um algoritmo de bisseção para determinar o maior valor de γ . Foi obtido um $\gamma = 0,6431$. Por outro lado, repedindo-se o procedimento desta vez considerando um ganho do tipo LPV, foi obtido $\gamma = 0,7480$, que, portanto, é 16,31% maior que o valor encontrado para o caso com ganho robusto.

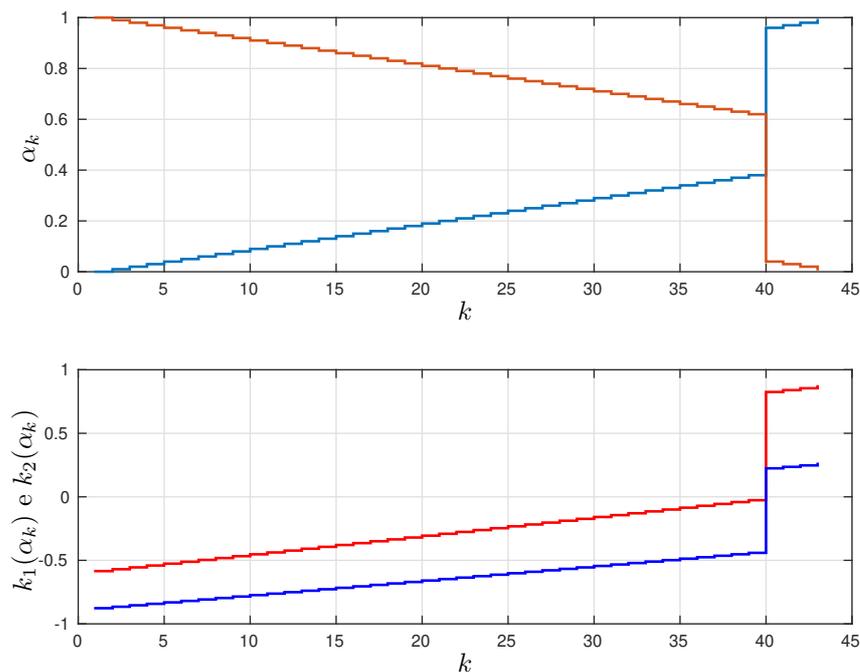


Figura 4.3: Valores de α_k (superior) e ganhos $K_{1,k}$ e $K_{2,k}$ para condição inicial $x_0 = -[0,2925 \ 0,9017]$ (inferior).

Fixando-se $\gamma = 0,5$ e resolvendo o sistema (4.30) com um ganho LPV, determinou-se uma estimativa da região de atração. Os resultados obtidos podem ser observados na Figura 4.4 em que são observados os conjuntos elipsoidais $\mathcal{E}(P_1)$ e $\mathcal{E}(P_2)$ e a interseção desses dois conjuntos identificada pela cor vermelha.

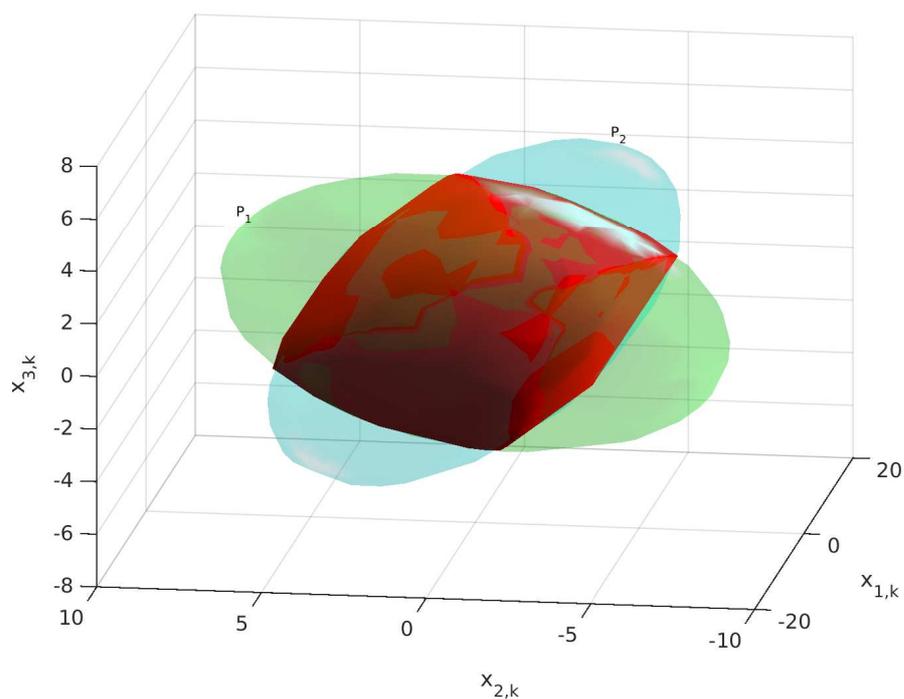


Figura 4.4: Região de atração para o Exemplo 2 com $\gamma = 0,5$.

4.1.3 Considerações finais

Nesta seção foi apresentada uma metodologia para o projeto de controle por realimentação de estados para sistemas LPV de tempo discreto sujeitos a atuadores saturantes, baseada em uma função poliquadrática, isto é, o grau das matrizes do Corolário 4.1 são equivalentes a 1, que é um caso particular do Teorema 3.1 apresentado no capítulo anterior. As condições convexas estabelecidas, foram formuladas em termos de LMIs, que quando satisfeitas, asseguravam que as trajetórias do sistema LPV de malha fechada fossem limitadas.

4.2 Seguimento de referência

O objetivo desta seção é tratar o problema de nível de um sistema de tanques que é apresentado na próxima seção deste capítulo. Para isso, é necessário adaptar as condições de projeto de controlador para inclusão de um integrador. Portanto, é realizado um procedimento convexo, com base em funções poliquadráticas, para projetar controladores LPV com ação proporcional sobre os estados do sistema e ação integral sobre o erro de rastreamento. Além disso, essa proposta garante o desempenho dos sistemas de malha fechada, proporcionando uma taxa de contratividade da função Lyapunov.

Primeiramente, considere o seguinte sistema LPV discreto no tempo sujeito a atuadores saturantes dado em (4.1) e:

$$y_k = Cx_k, \quad (4.31)$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ é a matriz de saída.

O objetivo desta seção é projetar uma ação integral proporcional (PI) dependente de parâmetro, com base em um controlador de realimentação de estados, para o sistema (4.1) e (4.31). O controlador foi projetado para garantir um erro de estado estacionário nulo para referências constantes por partes, além da rejeição a perturbações, devido as características de robustez do próprio integrador. O erro é dado por

$$e_k = r_k - y_k, \quad (4.32)$$

em que r_k é a saída desejada do sistema. A Figura 4.5 descreve a topologia do controlador a ser projetado.

Devido à ação integral o sistema de malha fechada atual apresenta ordem maior que o sistema descrito em (4.1) e (4.31). Assim, como pode ser visto na Figura 4.5, o vetor de estado aumentado é dado por $\xi_k = [x_k^T \quad v_k^T]^T$, e o sistema (4.1) e (4.31) passa a ser reescrito em termos dos estados aumentados como

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= \mathcal{A}(\alpha_k)\xi_k + \mathcal{B}(\alpha_k)\text{sat}(u_k), \\ y_k &= \mathcal{C}\xi_k, \end{aligned} \quad (4.33)$$

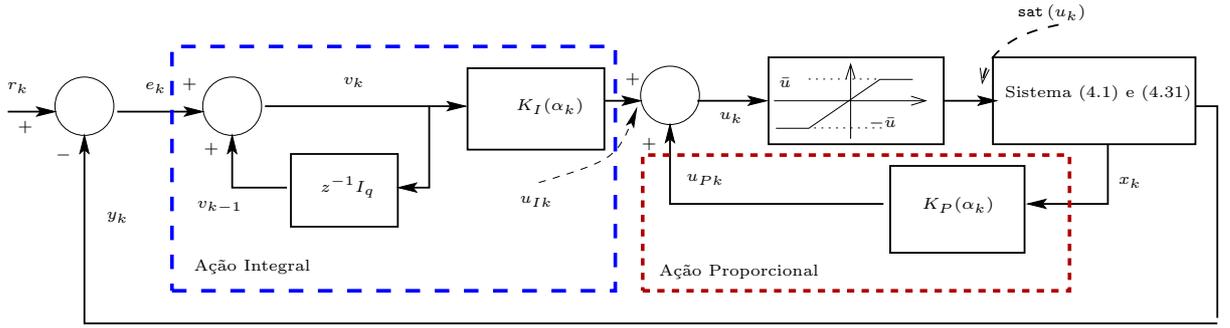


Figura 4.5: Topologia do controlador LPV com ação integral.

em que

$$\mathcal{A}(\alpha_k) = \begin{bmatrix} A(\alpha_k) & \mathbf{0} \\ -CA(\alpha_k) & \mathbf{I}_{n_y} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}(\alpha_k) = \begin{bmatrix} B(\alpha_k) \\ -CB(\alpha_k) \end{bmatrix} \\ \mathcal{C} = [C \quad \mathbf{0}]. \quad (4.34)$$

A lei de controle proposta para o sistema (4.33) é

$$u_k = K(\alpha_k)\xi_k, \quad K(\alpha_k) = [K_P(\alpha_k) \quad K_I(\alpha_k)], \quad (4.35)$$

com $K(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} K_i$. E nesta seção também, a não-linearidade $\text{sat}(u_k)$, é tratada por uma função zona-morta $\Psi(u_k)$,

$$\Psi(u_k) = u_k - \text{sat}(u_k). \quad (4.36)$$

Portanto, considerando as equações (4.35)-(4.36), é possível reescrever o sistema de malha fechada aumentado (4.33) como

$$\xi_{k+1} = \mathcal{A}_{cl}(\alpha_k)\xi_k - \mathcal{B}(\alpha_k)\Psi(u_k), \quad (4.37)$$

em que $\mathcal{A}_{cl}(\alpha_k) = \mathcal{A}(\alpha_k) + \mathcal{B}(\alpha_k)K(\alpha_k)$.

Devido à saturação nos atuadores, a estimativa região de atração ($\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$) deve ser determinada para que quaisquer trajetórias iniciadas em seu interior permaneçam nessa região e convirjam para a origem.

Como já mencionado, a estimativa da região de atração depende da função de Lyapunov. Como esta seção é uma extensão da seção anterior, a candidata à função de Lyapunov utilizada é a mesma, ou seja, poliquadrática. A diferença é que o vetor de estado utilizado nesta é aumentado, representado por ξ_k . Nesse caso, o conjunto de nível associado com a função de Lyapunov é o mesmo definido no Lema 3.1 com $g = 1$, sendo alterado também somente o vetor de estados.

O λ -contratividade é um índice de desempenho que pode ser considerado no projeto do controlador do sistema. Está relacionado com o decaimento da função de energia $V(\xi_k, \alpha_k)$

do sistema, ou seja, a variação da função de energia $\Delta V(\xi_k, \alpha_k)$ é limitada por um fator λ , que é compreendido entre 0 e 1. Portanto, tem-se a seguinte definição adaptada de Corso *et al.* (2009).

Definição 4.2 *O sistema LPV discreto no tempo com atuadores saturantes descrito em (4.33) é dito λ -contrativo se existe uma candidata função de Lyapunov $V(\xi_k, \alpha_k)$, tal que sua diferença*

$$\Delta V(\xi_k, \alpha_k) = V(\xi_{k+1}, \alpha_{k+1}) - \lambda V(\xi_k, \alpha_k) < -\kappa_0 \|\xi_k\|. \quad (4.38)$$

em que $\kappa_0 > 0$ e $\lambda \in]0,1]$, para todo $\alpha_k \in \Lambda$ e para todo $\xi_k \in \mathcal{L}_V$.

Conclui-se que quanto menor o índice λ , mais rápido um estado não nulo deve retornar à origem.

É importante destacar que na seção anterior o $\Delta V(\xi_k, \alpha_k)$ é um caso particular de (4.38), considerando o $\lambda = 1$.

O corolário a seguir apresenta condições para a estabilização do sistema (4.33) sob efeito do λ -contratividade utilizando a lei de controle (4.35). A abordagem utilizada é uma extensão do corolário da seção anterior, sendo que agora o controlador possui também uma ação integral.

Corolário 4.3 *Considere o sistema LPV discreto no tempo dado em (4.33) e um escalar $\lambda \in]0,1]$. Supõe que existam matrizes definidas positivas $Q_i = Q_i^T \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$, matrizes definidas positivas diagonal $V_i \in \mathbb{R}^{(n_u+1) \times (n_u+1)}$, e matrizes $X_i \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$, $L_i \in \mathbb{R}^{(n_u+1) \times (n+1)}$, $Y_j \in \mathbb{R}^{(n_u+1) \times (n+1)}$, $Z_j \in \mathbb{R}^{(n_u+1) \times (n_u+1)}$, $W_i \in \mathbb{R}^{(n_u+1) \times (n+1)}$, $i, j = 1, \dots, N$, tal que as LMIs*

$$\begin{bmatrix} He(X_{11,i}) - \lambda Q_{11,i} & X_{12,i} + X_{21,i}^T - \lambda Q_{12,i} & -W_{11,i}^T & X_{11,i}^T A_i^T \\ X_{21,i} + X_{12,i}^T - \lambda Q_{21,i} & He(X_{22,i}) - \lambda Q_{22,i} & -W_{12,i}^T & X_{12,i}^T A_i^T \\ \star & \star & He(V_{11,i}) & -V_{11,i}^T B_i^T \\ \star & \star & \star & Q_{11,j} - R_{11,ij} \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \\ -X_{11,i}^T A_i^T C^T + X_{21,i}^T & -L_{11,i}^T \\ -X_{12,i}^T A_i^T C^T + X_{22,i}^T & -L_{12,i}^T \\ V_{11,i}^T B_i^T C^T & \mathbf{0} \\ Q_{12,j} - R_{12,ij} & B_i Z_{11,j} - Y_{11,j}^T \\ Q_{22,j} - R_{22,ij} & -C B_i Z_{11,j} - Y_{12,j}^T \\ \star & He(Z_{11,j}) \end{bmatrix} > 0 \quad (4.39)$$

$$\begin{bmatrix} -\rho_{(r)}^2 & L_{11,i(r)} - W_{11,i(r)} & L_{12,i(r)} - W_{12,i(r)} \\ \star & Q_{11,i} - He(X_{11,i}) & Q_{12,i} - X_{12,i} - X_{21,i}^T \\ \star & Q_{21,i} - X_{21,i} - X_{12,i}^T & Q_{22,i} - He(X_{22,i}) \end{bmatrix} < 0 \quad (4.40)$$

com

$$R_{ij} = He \left(\begin{bmatrix} B_i Y_{11,j} & B_i Y_{12,j} \\ -C B_i Y_{11,j} & -C B_i Y_{12,j} \end{bmatrix} \right), \quad (4.41)$$

$\forall i, j = 1, \dots, N$, e $r = 1, \dots, n_u$, são satisfeitas. Então, os ganhos do controlador dependentes de parâmetro obtidos por

$$K_i = [L_{11,i} \quad L_{12,i}] \begin{bmatrix} X_{11,i} & X_{12,i} \\ X_{21,i} & X_{22,i} \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.42)$$

$i = 1, \dots, N$, em que

$$K_i = [K_{P,i} \quad K_{I,i}],$$

com a lei de controle (4.35), estabiliza localmente e poliquadraticamente o sistema de malha fechada para todas as condições iniciais pertencentes ao conjunto $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} = \mathcal{L}_{\mathcal{V}}(1)$.

Prova: A prova deste Corolário 4.3 segue os mesmos passos da prova do Corolário 4.1, adaptando apenas a ordem das matrizes, devido a ação integral e inserindo o λ -contratividade. Portanto, será apresentado aqui um breve resumo da prova da seção anterior fazendo as modificações necessárias.

Primeiramente, assume-se que (4.39) é verificada. Substitui-se $[L_{11,i} \quad L_{12,i}]$ e $[W_{11,i} \quad W_{12,i}]$ por $[K_{P,i}X_{11,i} + K_{I,i}X_{21,i} \quad K_{P,i}X_{12,i} + K_{I,i}X_{22,i}]$ e $[G_{11,i}X_{11,i} + G_{12,i}X_{21,i} \quad G_{11,i}X_{12,i} + G_{12,i}X_{22,i}]$, respectivamente, e usa o fato de que

$$\begin{bmatrix} X_{11,i}^T & X_{21,i}^T \\ X_{12,i}^T & X_{22,i}^T \end{bmatrix} \lambda \begin{bmatrix} Q_{11,i} & Q_{12,i} \\ \star & Q_{22,i} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_{11,i} & X_{12,i} \\ X_{21,i} & X_{22,i} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} X_{11,i} + X_{11,i}^T - \lambda^{-1}Q_{11,i} & X_{12,i} + X_{21,i}^T - \lambda^{-1}Q_{12,i} \\ X_{21,i} + X_{12,i}^T - \lambda^{-1}Q_{21,i} & X_{22,i} + X_{22,i}^T - \lambda^{-1}Q_{22,i} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

para majorar o bloco que contém as quatro primeiras linhas e colunas da LMI (4.39). Posteriormente, pré- e pós-multiplica-se a condição resultante por

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11,i} & X_{12,i} \\ X_{21,i} & X_{22,i} \end{bmatrix}^{-T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

e seu transposto, respectivamente, e define-se

$$P_i = \begin{bmatrix} Q_{11,i} & Q_{12,i} \\ \star & Q_{22,i} \end{bmatrix}^{-1}, \quad F_i = \begin{bmatrix} P_{11,i} & P_{12,i} \\ \star & P_{22,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11,j} \\ Y_{21,j} \end{bmatrix}^T H_{11,i},$$

$$H_i = Z_{11,i}^{-T},$$

para todo $i, j = 1, \dots, N$, assim,

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda P_{11,i} & \lambda P_{12,i} & -G_{11,i}^T \\ \star & \lambda P_{22,i} & -G_{12,i}^T \\ \star & \star & \text{He}(V_{11,i}) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A_i^T & -A_i^T C \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -V_{11,i}^T B_i^T & V_{11,i}^T B_i^T C^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -K_{P,i}^T \\ -K_{I,i}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} P_j^{-1} - R_j \\ \star \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_i H_j^T - P_j^{-1} F_j H_j^{-1} \\ \text{He}(H_j^{-1}) \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0, \quad (4.45)$$

com R_{ij} dado em (4.41), que pode ser reescrito como

$$R_{ij} = \text{He} \left(\begin{bmatrix} B_i \\ -CB_i \end{bmatrix} H_{11,j}^{-T} \begin{bmatrix} F_{11,j} & F_{21,j}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11,j} & P_{12,j} \\ \star & P_{22,j} \end{bmatrix}^{-1} \right),$$

para todo $i, j = 1, \dots, N$. Pré- e pós-multiplica-se a inequação (4.45) por

$$\text{diag} \left\{ \mathbf{I}, V_{11,i}^{-T}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & H_{11,j} \\ P_{11,j} & P_{12,j} & F_{11,j} \\ \star & P_{22,j} & F_{21,j} \end{bmatrix} \right\}$$

e seu transposto, respectivamente, e devido a regularidade de V_i , considere $S_i = V_{11,i}^{-1}$, depois, multiplica-se a condição resultante por $\alpha_i, \alpha_j, \alpha \in \Lambda$, e faz-se o somatório para todo $i, j = 1, \dots, N$. Pré- e pós-multiplica-se o resultado por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & P(\alpha_{k+1})^{-1} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} K_P(\alpha_k)^T \\ K_I(\alpha_k)^T \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

e seu transposto, respectivamente. Posteriormente, aplica-se o complemento de Schur e pré- e pós-multiplica-se a inequação resultante pelo vetor $[\xi_k^T \quad \Psi(u_k)^T]$ e seu transposto, assim

$$\begin{aligned} & \xi_{k+1}^T P(\alpha_{k+1}) \xi_{k+1} - \xi_k^T \lambda P(\alpha_k) \xi_k \\ & - 2\Psi(K(\alpha_k)\xi_k)^T S(\alpha_k) \left(\Psi(K(\alpha_k)\xi_k) - G(\alpha_k)\xi_k \right) < 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

com

$$P(\alpha_k) = \begin{bmatrix} P_{11}(\alpha_k) & P_{12}(\alpha_k) \\ \star & P_{22}(\alpha_k) \end{bmatrix}, G(\alpha_k) = [G_{11}(\alpha_k) \quad G_{12}(\alpha_k)], \quad (4.47)$$

e $K(\alpha_k)$ dado em (4.35).

Conclui-se, então, que o sistema (4.33) possui trajetórias de modo que sua função de Lyapunov é λ -contrativa. Portanto, a viabilidade da desigualdade (4.39) implica a estabilização poliquadrática (local) (Daafouz & Bernussou, 2001) do sistema (4.33) por uma lei de controle (4.35) com ganho de realimentação de estado (4.42), garantindo uma taxa mínima de contratividade da função Lyapunov.

A condição (4.40) garante que o nível de contração definido pela função Lyapunov seja incluído em \mathbb{S} . Então, se (4.40) também é satisfeita, é, portanto, realizado o primeiro procedimento da prova da condição (4.39), isto é, as mesmas substituições. Posteriormente, faz-se a transformação de congruência com a matriz dada em (4.44). Multiplica-se o resultado por $\alpha_i, \alpha \in \Lambda$, e faz o somatório para todo $i = 1, \dots, N$. Aplica-se o complemento Schur e finalmente multiplica-se o resultado pelo vetor ξ_k^T e sua transposição, obtendo assim

$$\xi_k^T [K(\alpha_k)_{(r)} - G(\alpha_k)_{(r)}]^T \rho_{(r)}^{-2} [K(\alpha_k)_{(r)} - G(\alpha_k)_{(r)}] \xi_k - \xi_k^T P(\alpha_k) \xi_k \leq 0 \quad (4.48)$$

para todo $\alpha_k \in \Lambda$ e $r = 1, \dots, n_u$, em que $K(\alpha_k)$ é dado em (4.35), $G(\alpha_k)$ e $P(\alpha_k)$ dado em (4.47). Consequentemente, o conjunto \mathbb{S} inclui o conjunto contrativo $\mathcal{R}_\mathcal{E} = \mathcal{L}_\mathcal{V}(1)$. Como resultado, o sistema LPV de malha fechada sujeito a atuadores saturantes (4.33) cuja lei de controle dada em (4.35) com ganhos de realimentação de estados (4.42), tem suas trajetórias emanadas em $\mathcal{R}_\mathcal{E}$ convergindo para a origem sem sair de $\mathcal{R}_\mathcal{E}$. ■

Para maximizar a estimativa da região de atração proveniente do Teorema 4.3 é realizado o procedimento de otimização \mathcal{Q}_H em (4.28) sujeito as LMIs (4.39) e (4.40).

As condições estabelecidas nesta parte são necessárias para o desenvolvimento da próxima seção, em que são apresentados e discutidos os principais resultados provenientes da aplicação dessas condições de projeto em um sistema de dois tanques acoplados, sendo que um destes contém uma não linearidade em seu interior.

4.3 Estudo de caso

Nesta seção será ilustrada a proposta desenvolvida na seção anterior para um processo de nível não linear de segunda ordem, modelado por um sistema *quasi*-LPV. O processo consiste em dois tanques acoplados com sensores e atuadores industriais padrão. Será apresentada a configuração experimental, seguida pela modelagem física e, por fim, os resultados experimentais.

4.3.1 Configuração experimental

Os testes são realizados em um sistema de tanques, mostrado na Figura 4.6, que está disponível no Laboratório de Sinais e Sistemas do CEFET-MG, campus Divinópolis. O processo físico é contido por quatro tanques acoplados sendo que cada um tem uma capacidade volumétrica de 200 l e altura de 0,75 m, acionados por duas bombas de 1 HP com velocidade variável. Os tanques inferiores têm um escoamento direcionado para um reservatório, cuja capacidade volumétrica é de 400 l.

O monitoramento das variáveis de interesse, como a altura e a vazão, são medidas por meio de quatro sensores de pressão (um para cada tanque) e dois sensores de vazão, sendo que um é do tipo roda de água e outro magnético.

A programação do controlador no sistema de tanques é realizada com a ajuda de uma interface baseada em Python (Sousa *et al.*, 2018) e a execução em um computador de baixo custo (Raspberry Pi3), em que é facilmente programado. O controlador toma as medidas executadas e armazenadas em um controlador lógico programável (CLP) Simatic S7-300 usando comunicação Ethernet. O CLP envia o sinal de controle para um inversor WEG CFW09 que comanda a velocidade da bomba. Além disso, a planta possui um sistema de segurança de intertravamento programado em Python, o qual limita a altura



Figura 4.6: Sistema de tanques acoplados.

dos tanques em $0,7\text{ m}$ a fim de não ocorrer um transbordamento.

4.3.2 Modelagem física

Inicialmente, foi selecionada uma configuração para o sistema, no qual os tanques inferiores foram escolhidos. O esquemático representado na Figura 4.7 ilustra tal configuração.

O reservatório contido no modelo físico é utilizado pela bomba para executar os testes, circulando a água dele para o tanque TQ-02. O nível deve ser controlado no tanque TQ-01, onde foi colocado um sólido não linear com perfil gaussiano projetado em poliestireno expandido, como pode ser visto na Figura 4.8.

Para a modelagem do sistema, primeiramente foram aplicadas equações de balanço de massa em cada tanque,

$$\dot{V}(t) = q_{in} - q_{out}. \quad (4.49)$$

As vazões, q_{in} e q_{out} , apresentadas na equação (4.49) representam o fluxo de entrada e saída, respectivamente, e foram retiradas empiricamente. A primeira curva a ser calculada foi a vazão da bomba, q_{in} . O teste consistia em aplicar um valor de tensão, este convertido em valores percentuais, na bomba durante um intervalo de tempo e verificar a altura em

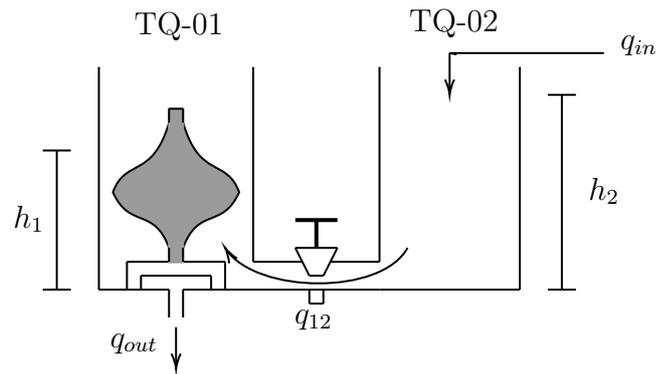


Figura 4.7: Esquemático do sistema de tanques.



Figura 4.8: Sólido contido no TQ-01.

TQ-02. Assim, obteve-se,

$$q_{in} = (1,64u(t) + 35,7) \times 10^{-5}, \quad (4.50)$$

em que $0\% \leq u(t) \leq 100\%$ é o sinal de controle, com a curva de regressão apresentada na Figura 4.9.

Por meio de (4.50) foi realizado o teste para calcular a vazão comunicante e a vazão de saída do sistema. Primeiramente, o processo físico foi colocado nas condições de operação, ou seja, a válvula comunicante foi totalmente aberta e a de saída teve apenas três voltas de abertura. Após isso, foi introduzida a vazão de entrada conhecida e aguardou o sistema alcançar regime permanente, dessa forma a vazão de entrada iguala-se à comunicante e à de saída. Em seguida, foram mensuradas as alturas de ambos os tanques. Sabe-se que a vazão de saída depende da altura do TQ-01 ($h_1(t)$) e a vazão comunicante da diferença entre as alturas ($h_2(t) - h_1(t)$), conforme a equação de Bernoulli. Dessa forma, utilizou-se

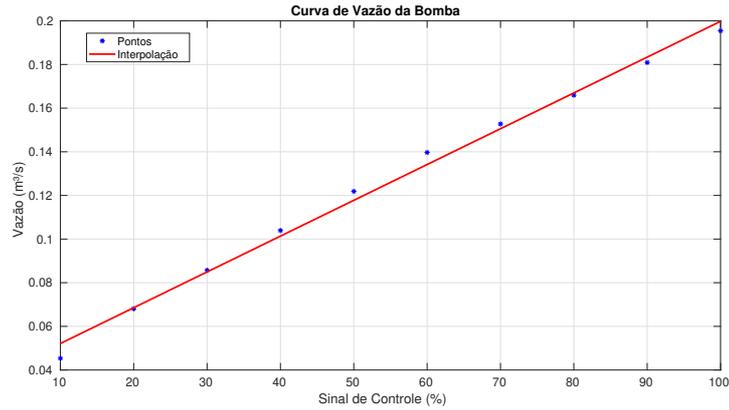


Figura 4.9: Curva de regressão da vazão de entrada.

a regressão linear, ilustrada na Figura 4.10, e obteve-se as seguintes equações:

$$q_{12} = (33,5(h_2(t) - h_1(t)) + 4,31) \times 10^{-4}, \quad (4.51)$$

$$q_{out} = (8,71\sqrt{h_1(t)} + 3,1) \times 10^{-4}. \quad (4.52)$$

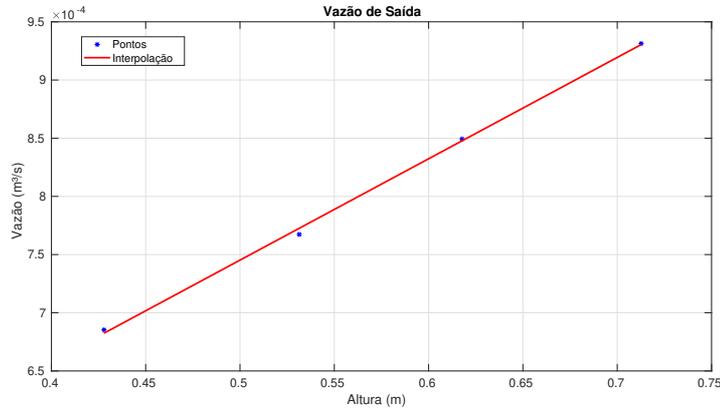


Figura 4.10: Curva de regressão da vazão de saída.

Então, devido a não linearidade imposta no TQ-01 tem-se,

$$\frac{d}{dt} \int_0^{h_1} a(h(t)) dh = q_{12} - q_{out}, \quad (4.53)$$

em que q_{12} e q_{out} são dados em (4.51) e (4.52), respectivamente, e $a(h_1)$ é a área transversal do nível $h_1(t)$:

$$a(h_1(t)) = \frac{3r}{5} \left(2,7r - \frac{\cos(2,5\pi(h_1(t) - \mu))}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(h_1(t) - \mu)^2}{2\sigma^2}} \right).$$

A variável $r = 0,31 \text{ m}$ é o raio do tanque, os parâmetros $\mu = 0,4$ e $\sigma = 0,55$ estão relacionados ao perfil gaussiano do sólido. Por causa de $a(h_1(t))$, a integral em (4.53) não

possui uma expressão analítica. Assim, com a finalidade de resolver esse problema, foi proposto uma aproximação dos termos, dependendo de $\cos(z)$ e e^w pela série de Taylor, com $z = 2,5\pi(h_1(t) - \mu)$ e $w = \frac{-(h_1(t)-\mu)^2}{2\sigma^2}$, como mostra a equação (4.54). O número de termos foi escolhido para garantir $|a(h_1(t)) - \tilde{a}(h_1(t))| \leq 4 \times 10^{-3}$. A medição da área está sujeita a oscilação do nível do tanque, então, se essa variação for considerada o erro da diferença da área devido à medição é menor que o erro da aproximação considerado, que é 4×10^{-3} .

$$\tilde{a}(h_1(t)) = \frac{3r}{5} \left(2,7r - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{720} - \frac{z^6}{720} + \frac{z^8}{40320} \right) \left(1 + w + \frac{w^2}{2} - \frac{w^3}{6} + \frac{w^4}{24} \right) \right) \quad (4.54)$$

Substituindo $a(h_1(t))$ por $\tilde{a}(h_1(t))$ em (4.53), é possível obter

$$\dot{h}_1(t) = \frac{q_{12} - q_{out}}{\tilde{a}(h)}, \quad (4.55)$$

que modela a dinâmica do nível no tanque TQ-01. Para o tanque TQ-02, a área transversal é constante e igual a $0,3019 \text{ m}^2$, o que, por etapas semelhantes feitas para o TQ-01, produz:

$$\dot{h}_2(t) = \frac{q_{in} - q_{12}}{0,3019}. \quad (4.56)$$

Portanto, o modelo não linear fornecido por (4.55)-(4.56) modela a dinâmica dos tanques.

Destaca-se que o modelo obtido depende dos níveis medidos. Em particular, a área $\tilde{a}(h_1(t))$ depende da altura do TQ-01, que é mensurada. Portanto, o sistema se encaixa em um sistema *quasi*-LPV, ou seja, um sistema que depende de um parâmetro obtido indiretamente de outras medições feitas online.

A fim de validar o modelo obtido, este foi linearizado para os pontos de operação de $0,28$, $0,38$ e $0,48 \text{ m}$ da altura do TQ-01. Após linearizado, o sistema foi submetido a uma entrada degrau com uma variação de $\pm 0,04 \text{ m}$ de altura do ponto de operação. As validações podem ser visualizadas nas Figuras 4.11, 4.12 e 4.13.

A condição estabelecida na seção anterior é baseada em inequações lineares matriciais. Portanto, é necessário definir um politopo, linear e convexo, para o sistema com seus respectivos vértices. Dessa maneira, realizou-se um teste em que o sistema (4.55) e (4.56) foi linearizado em toda extensão dos seus pontos de operação. Logo em seguida, o processo contínuo foi discretizado com o tempo de amostragem de $T_s = 5,2632 \text{ s}$, que é cerca de um quinto da constante de tempo mais rápida na faixa operacional, incluindo o efeito de portador de ordem zero. Assim, analisou-se o comportamento dos termos das matrizes geradas, como podem ser vistos na Figura 4.14.

A Figura 4.14, como pode observar, apresenta somente a variação dos termos da segunda linha da matriz de estado, que representa a altura do TQ-01. Como a área do

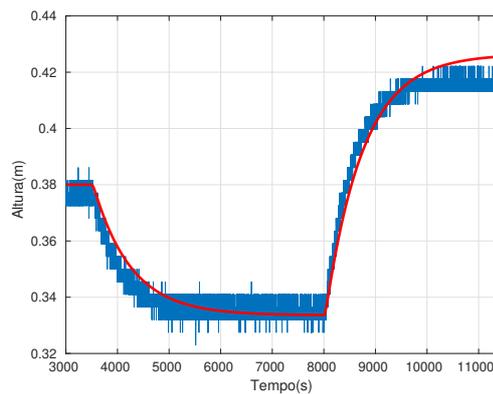
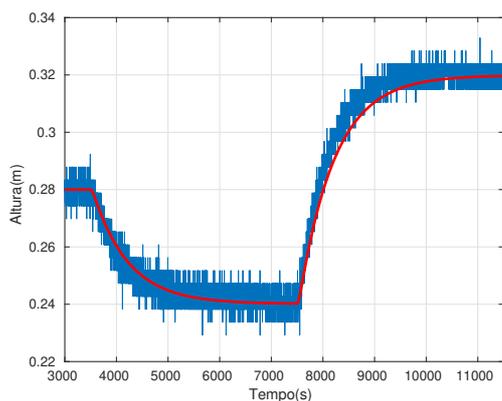


Figura 4.11: Validação de $h_1(t)$ para 0,28 m. Figura 4.12: Validação de $h_1(t)$ para 0,38 m.

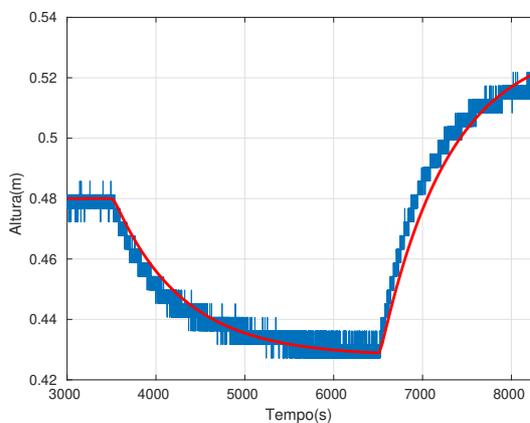


Figura 4.13: Validação de $h_1(t)$ para 0,48 m.

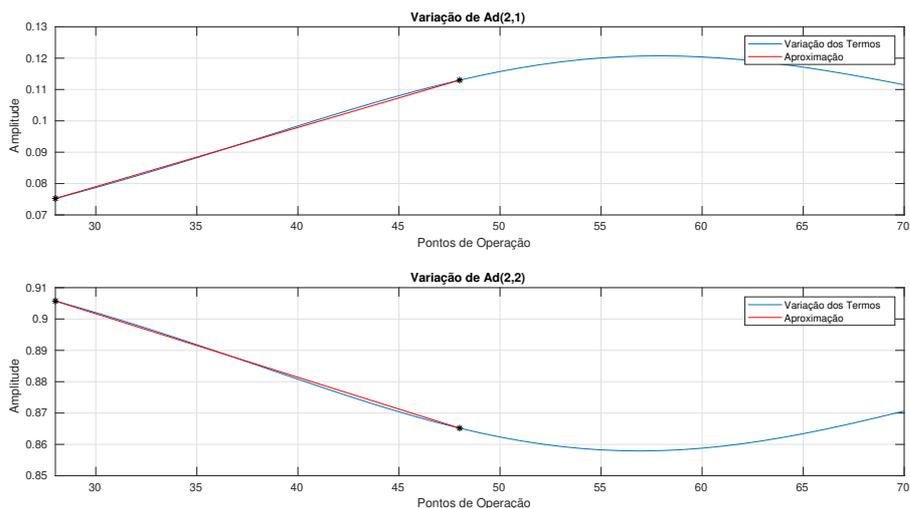


Figura 4.14: Comportamento dos termos das matrizes de estados.

TQ-02 é constante, os termos das matrizes geradas referente à sua altura não apresentam variações, por este motivo não são mostrados na Figura 4.14.

Devido ao nível máximo suportado pelos tanques, assume-se uma faixa de operação

de $0,28 \text{ m} \leq h_1(k) \leq 0,48 \text{ m}$. Para esse intervalo, é possível envolver a dinâmica por dois modelos lineares, um em cada valor extremo de $h_1(k)$, como visto na reta indicada pela **cor vermelha** da Figura 4.14. Portanto, as matrizes discretizadas, apresentam os seguintes vértices:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,9455 & 0,0540 \\ 0,0752 & 0,9057 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0,9466 & 0,0528 \\ 0,1130 & 0,8652 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T, \\ B_1 = \begin{bmatrix} 0,2779 \\ 0,0111 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, B_2 = \begin{bmatrix} 0,2780 \\ 0,0167 \end{bmatrix} \times 10^{-3}. \quad (4.57)$$

Esses vértices são conectados por um parâmetro LPV, o qual foi calculado por meio da interpolação da reta em vermelho na Figura 4.14, assim

$$\alpha_1(k) = -0,05h_1(k) + 2,4, \\ \alpha_2(k) = 0,05h_1(k) - 1,4. \quad (4.58)$$

4.3.3 Resultados experimentais

A programação de ganho exige uma escolha do limite de saturação ρ e da constante de contratividade λ . Para ilustrar as condições do Corolário 4.3, é aplicado o problema de otimização (4.28) ao sistema modelado para $\rho = 25\%$ e $\rho = 15\%$. O primeiro ρ é o valor máximo de controle simétrico em torno da condição operacional mínima no intervalo $0,28 \leq h_1(k) \leq 0,48 \text{ m}$. O segundo leva a valores limitados no atuador.

O valor de λ afeta diretamente o tamanho de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$. Quanto menor o λ , menor a região de atração. Se λ for escolhido muito próximo da unidade, a região $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ não será realista, permitindo níveis acima da altura dos tanques. Por outro lado, pequenos valores de λ levam a uma convergência muito rápida, mas a regiões de atração muito pequenas. Escolhemos $\lambda = 0,95$, empiricamente, estabelecendo um compromisso entre o tamanho de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ e a velocidade da convergência.

Então, com $\rho = 25\%$ tem-se os seguintes ganhos do controlador

$$K_{P1} = [-2,6568 \quad -1,6630] \times 10^3, K_{I1} = 109,6971, \\ K_{P2} = [-2,7894 \quad -1,6076] \times 10^3, K_{I2} = 111,8418, \quad (4.59)$$

e com $\rho = 15\%$ os ganhos são

$$K_{P1} = [-2,7336 \quad -1,7116] \times 10^3, K_{I1} = 112,9695, \\ K_{P2} = [-2,8681 \quad -1,6491] \times 10^3, K_{I2} = 114,8949. \quad (4.60)$$

Por causa de (4.58), a equação (4.35) pode ser reescrita como

$$K_P(h_1(k)) = 0,05h_1(k)(K_{P2} - K_{P1}) - 2,4K_{P1} + 1,4K_{P2}$$

$$K_I(h_1(k)) = 0,05h_1(k)(K_{I2} - K_{I1}) - 2,4K_{I1} + 1,4K_{I2}. \quad (4.61)$$

Assim, a partir desses ganhos são realizados dois tipos de ensaios: um para rastreamento de referência e outro para regulação em torno de um determinado ponto de ajuste. Deve-se ressaltar que o rastreamento de referência implica no estudo de tolerância ao sinal exógeno (ou ao distúrbio) como é feito em (Lopes *et al.*, 2020). Entretanto, neste trabalho a estimativa de variação do sinal de referência é feita por meio de simulações numéricas, com a verificação a posteriori das trajetórias de malha fechada.

Rastreamento de Referência: Para cada controlador projetado, é realizado um experimento em tempo real para rastrear uma sequência de etapas de referência. Os resultados alcançados estão representados na Figura 4.15, onde fica claro que ambos os controladores direcionam o nível para o valor desejado com um erro de estado estacionário nulo. O leitor pode observar nos detalhes desta figura que, o projeto com $\rho = 25\%$ (linha pontilhada vermelha) é mais agressivo, levando a uma resposta de tempo mais rápida, com menor tempo de subida. O máximo sobressinal de ambos os projetos são quase os mesmos, assim como o tempo de acomodação. Nos projetos e em todas as etapas, a saída controlada vai para o valor de referência, conforme o esperado.

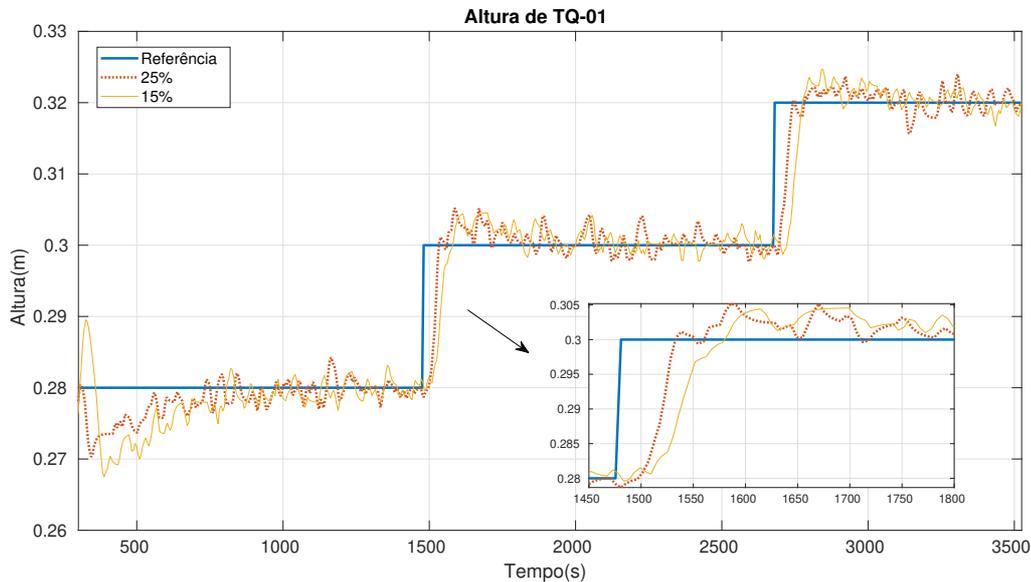


Figura 4.15: Nível do tanque TQ-01, $(h_1(k))$, assumindo $\rho = 25\%$ (linha pontilhada vermelha) e $\rho = 15\%$ (linha sólida laranja).

A Figura 4.16 mostra os sinais de controle (linhas azuis) e os respectivos limites de saturação (linhas tracejadas vermelhas). Observe que o controle usa todo o intervalo permitido, alcançando a saturação em vários instantes, especialmente nos correspondentes à etapa de referência.

A Figura 4.17 mostra a variação temporal dos ganhos de controle (integral e proporcional). Observe que o ruído nas medidas de $h_1(t)$ causa flutuações nos valores dos ganhos

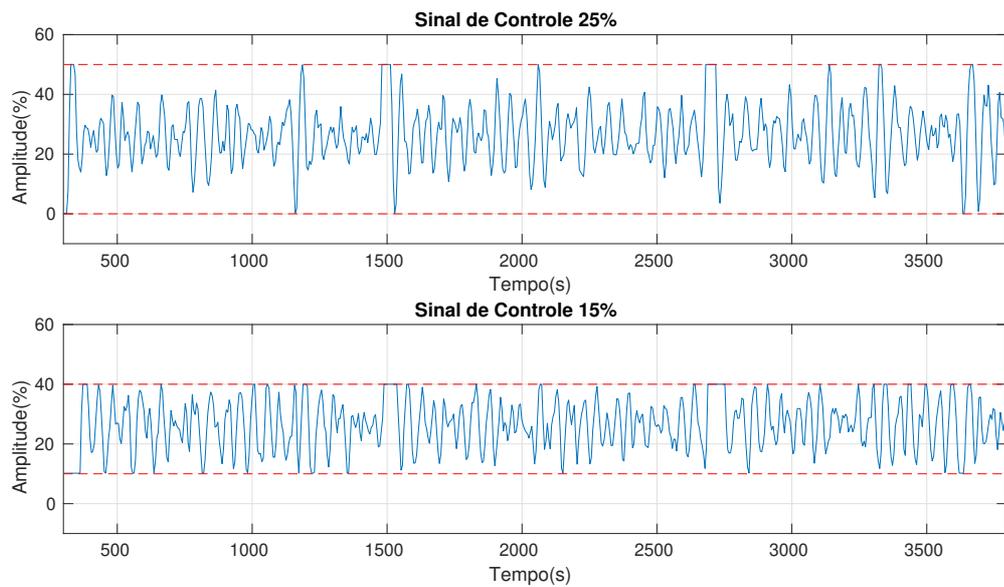


Figura 4.16: Sinais de controle. A **linha tracejada vermelha** representa o sinal de controle representa os limites do sinal de controle e a **linha azul** os sinais de controle para $\rho = 25\%$ (superior) e $\rho = 15\%$ (inferior).

em torno dos valores esperados.

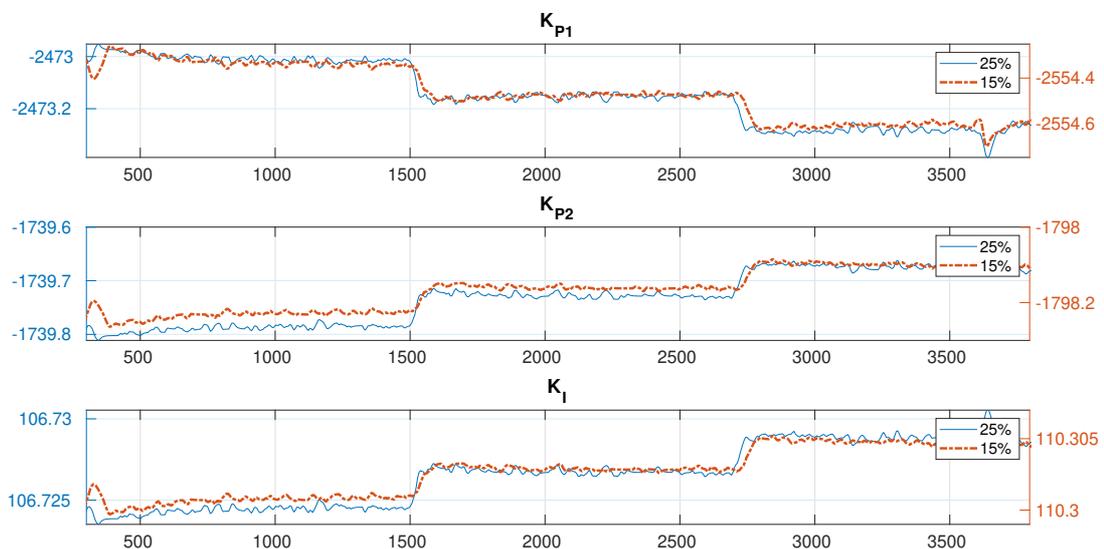


Figura 4.17: Comportamento dos ganhos de controle em variação do tempo.

Regulamento de Nível: Para cada controlador projetado, é realizado um experimento em tempo real para manter o nível em $h_1(t) = 0,32 \text{ m}$; os resultados alcançados são mostrados na Figura 4.18. Em $t = 3500 \text{ s}$, uma perturbação padrão é imposta ao processo, elevando o nível controlado para mais de $0,333 \text{ m}$. O leitor pode ver o zoom nesta figura, mostrando em detalhes a rejeição de perturbação realizada por cada controlador,

sendo que aquele que apresenta um limite de saturação maior ($\rho = 25\%$) tem uma ação um pouco mais agressiva ao direcionar o nível controlado (linha pontilhada vermelha) de volta à referência.

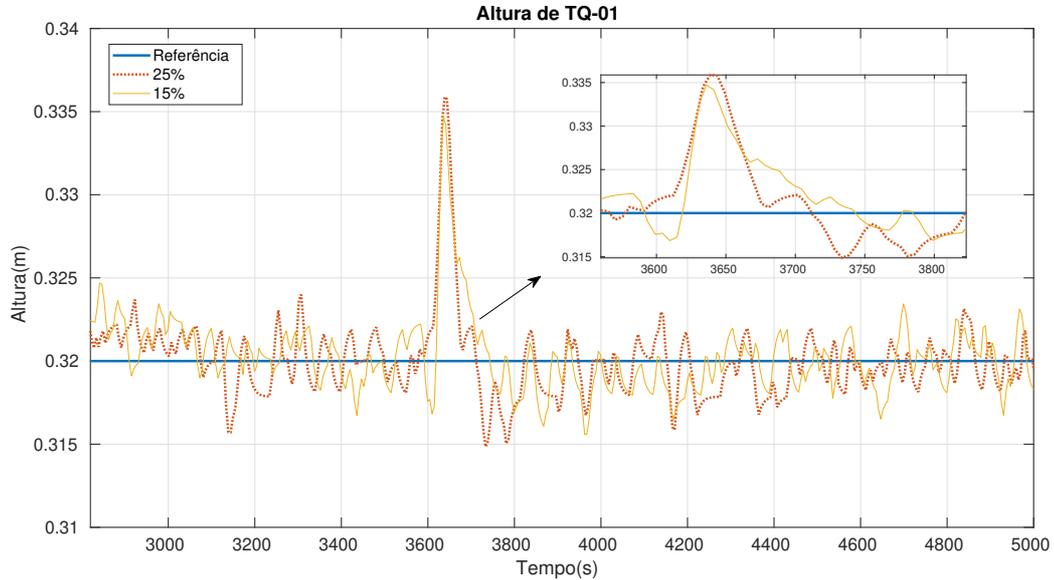


Figura 4.18: Nível do tanque TQ-01 sob perturbação para o projeto de controladores com $\rho = 25\%$ (linha pontilhada vermelha) e $\rho = 15\%$ (linha sólida laranja).

Novamente, os sinais de controle agem para rejeitar a perturbação atingindo os limites de saturação, conforme mostrado na Figura 4.19. É claro que no sinal de controle mais restrito ($\rho = 15\%$, plotagem inferior), o número de vezes que o atuador satura é maior do que para a saturação $\rho = 25\%$ (plotagem superior). Essa diferença ocorre, porque os dois projetos compartilham o mesmo parâmetro de contratividade, $\lambda = 0,95$, apesar dos limites de saturação relativos.

Para ilustrar que as trajetórias iniciais em $\mathcal{R}_\mathcal{E}$ não saem de $\mathcal{R}_\mathcal{E}$, são apresentadas as regiões de atração do sistema com um limite de saturação $\rho = 15\%$, como pode ver na Figura 4.20, e com $\rho = 25\%$ como mostra a Figura 4.21. As figuras 4.20 e 4.21 mostram que as trajetórias de ambos os testes (rastreamento de referência e regulação de nível) permanecem dentro de $\mathcal{R}_\mathcal{E}$ para qualquer um dos limites de saturação impostos. No detalhe, é mostrado um corte dos conjuntos elipsoidais com o plano $x_I = 0$ e a projeção das trajetórias. Vale ressaltar, que no caso do $\rho = 15\%$ tem uma região menor $\mathcal{R}_\mathcal{E}$ do que a alcançada com $\rho = 25\%$, como era o esperado. Portanto para o caso do limite $\rho = 25\%$ caberia aumentar um pouco a perturbação ou o degrau aplicado na entrada, que ainda assim as trajetórias não sairiam de $\mathcal{R}_\mathcal{E}$.

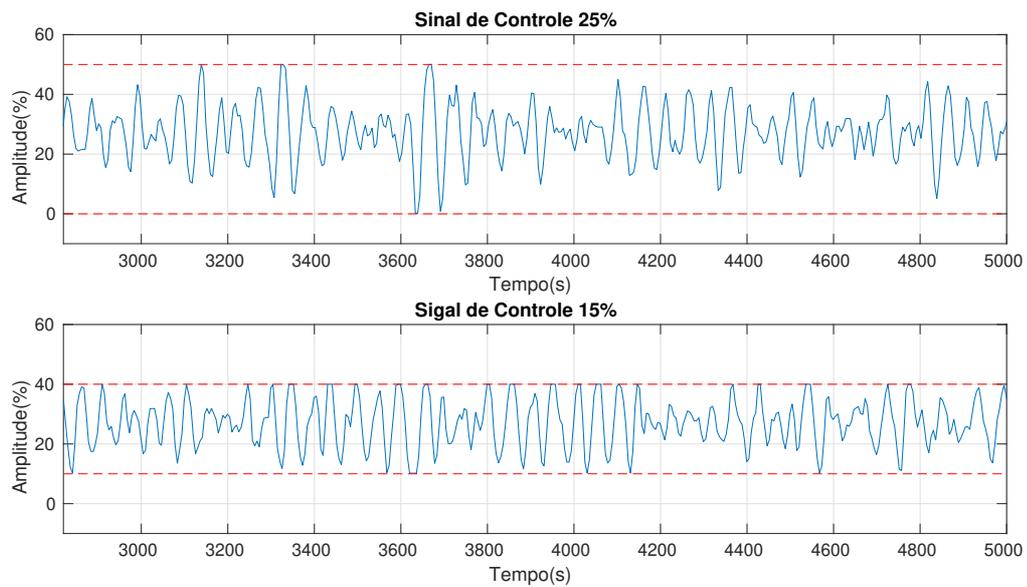


Figura 4.19: Sinais de controle. A linha tracejada representa o limite do sinal de controle.

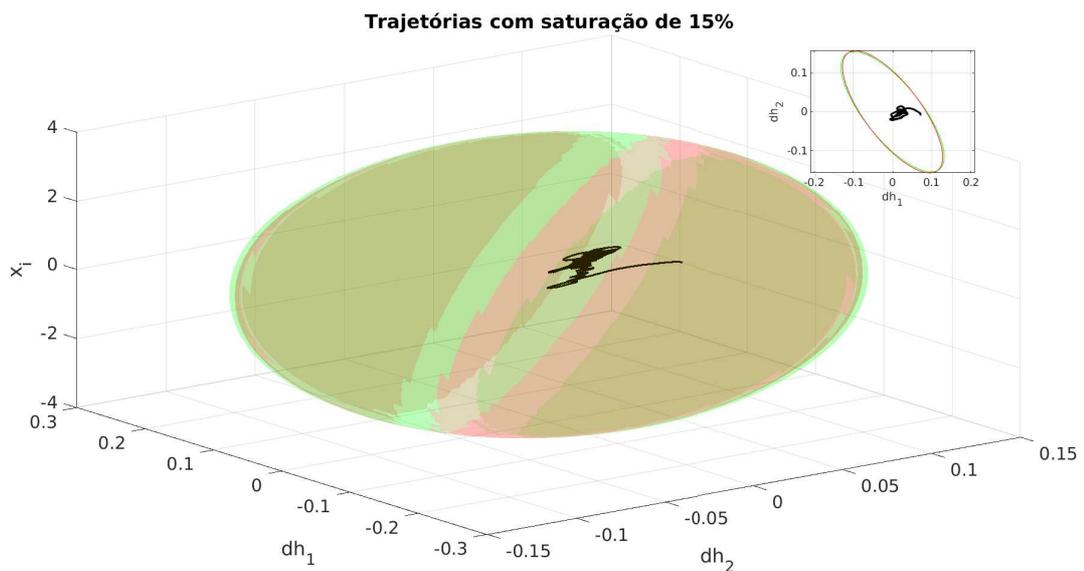


Figura 4.20: \mathcal{R}_E para $\rho = 15\%$ para rastreamento de referência e regulação de nível (linha preta).

4.4 Considerações finais

Na primeira seção deste capítulo foi apresentada uma nova metodologia para o projeto de controle por realimentação de estados para sistemas LPV de tempo discreto sujeitos a atuadores saturantes, baseada em uma função poliquadrática, que é um caso particular das funções polinomiais homogêneas apresentadas no capítulo anterior, sendo o grau das matrizes do Corolário 4.1 equivalentes a 1. Dois exemplos numéricos foram ilustrados para mostrar a eficácia do método.

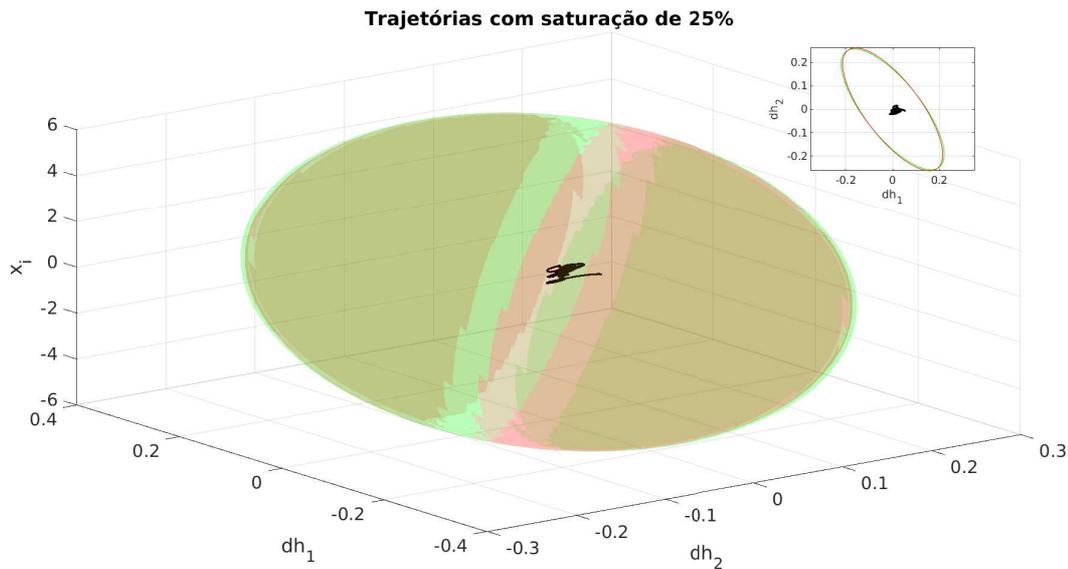


Figura 4.21: \mathcal{R}_ε para $\rho = 25\%$ para rastreamento de referência e regulação de nível (linha preta).

A segunda seção faz uma extensão da condição proposta na primeira. Agora, as condições convexas possuem uma ação proporcional-integral (PI) para um sistema com parâmetro linear variante no tempo sujeito a atuadores saturantes. A ação proporcional é proveniente da realimentação de estado, e a integral atua sobre o erro de rastreamento. Essas condições garantem também a estabilização poliquadrática local dos processos dependentes de parâmetros.

Por fim, na terceira seção foram ilustradas as propostas realizadas na segunda para um processo não linear de segunda ordem modelado em um sistema *quasi*-LPV. Com base no controlador projetado foram realizados dois tipos de ensaios: um para rastreamento de referência e outro para regulação em torno de um determinado ponto de ajuste. A variação do sinal de referência foi realizada por meio de testes experimentais, porém é possível obter de forma exata a máxima variação como é realizado em (Lopes *et al.*, 2020). Os experimentos em tempo real mostraram a eficácia do procedimento do projeto que também garante um índice de desempenho, fornecido pela contratividade da função Lyapunov. Além disso, foram determinadas as estimativas regiões de atração para diferentes valores do limite de saturação. Percebe-se, então, que utilizando uma função poliquadrática foi possível alcançar o objetivo proposto. Por esse motivo não foi necessário a realização deste experimento para as condições apresentadas no Capítulo 3 que são mais gerais.

Conclusões

5.1 Considerações finais

Neste trabalho foram apresentadas algumas metodologias para o projeto de controle por realimentação de estados para sistemas LPV de tempo discreto sujeitos a atuadores saturantes. As condições convexas estabelecidas, são formuladas em termos de LMIs, que se satisfeitas, asseguram que as trajetórias do sistema LPV de malha fechada estejam limitadas. A saturação do sinal de controle foi considerada como uma não-linearidade do tipo zona-morta, na qual foi aplicada a condição de setor generalizada. Devido a esta limitação dos atuadores, foi necessário estimar uma região em que todas as trajetórias dos estados com condições iniciais pertencentes a esta convirja para a origem. Portanto, foram realizadas condições de síntese de controladores por realimentação de estados, que garantiam a estabilidade assintótica de sistemas LPV discreto no tempo sujeitos a atuadores saturantes, para um conjunto de condições iniciais admissíveis.

Para o desenvolvimento das condições primeiramente foi necessário uma revisão bibliográfica dos principais assuntos, como sistemas LPV, saturação do sinal de controle e funções de Lyapunov, que podem ser visualizadas nos Capítulos 1 e 2 deste trabalho. Além disso, no Capítulo 2 foi realizada uma explicação de como utilizar funções de Lyapunov polinomiais homogêneas para a síntese de controladores, a qual é a abordagem que resulta no principal resultado da dissertação.

No Capítulo 3 foram propostas duas abordagens baseadas em funções de Lyapunov polinomiais homogêneas para tratar os sistemas LPV com atuadores saturantes: a primeira foi baseada em uma abordagem já existente na literatura sendo utilizada três variáveis de folga, a segunda foi realizada utilizando apenas as ferramentas matriciais como complemento de Schur e transformação de congruência, com adição de somente uma variável de folga.

Devido à quantidade de variáveis de folga era esperado que a primeira abordagem apresentasse melhores resultados. Porém, como foi visto no Capítulo 3, no segundo exem-

plo, à medida que aumentava o grau das matrizes das condições, os resultados da segunda abordagem eram mais satisfatórios, além disso, a primeira abordagem gerava maior custo computacional. No primeiro exemplo foi mostrado apenas os resultados obtidos com a segunda abordagem, isto porque os resultados obtidos com a primeira abordagem foram exatamente os mesmos, porém a primeira demandou uma maior complexidade numérica para resolver, o que a tornou não atrativa. Pode-se concluir neste capítulo também, que a utilização de funções de Lyapunov polinomiais homogêneas geram resultados menos conservadores, embora o custo computacional seja maior, e também, a medida que aumenta o grau das matrizes pode aumentar o tamanho da estimativa região de atração, depende do sistema trabalhado. No primeiro exemplo do Capítulo 3 mesmo foi visto esse aumento de forma clara.

Foram também apresentadas condições de síntese de controladores, que são particularidades do primeiro teorema do Capítulo 3, para um sistema LPV com atuadores saturantes no Capítulo 4. Primeiramente, foi realizado um procedimento particular da primeira condição, baseada do trabalho de Pandey & de Oliveira (2017), do Capítulo 3, em que as matrizes da condição serão de grau 1, tornando uma função poliquadrática. Os resultados desta condição foram mostrados por meio de exemplos numéricos, fazendo comparações das funções poliquadráticas com as quadráticas e também de controladores robustos com controladores LPV. Foi possível notar que funções poliquadráticas geram resultados menos conservadores, isso porque a função de Lyapunov é dependente de parâmetro, ou seja, é apresentada de forma mais geral. E, controladores LPV apresentam melhores resultados comparados com os robustos, também devido à dependência de parâmetro. Em relação à estimativa região de atração, funções poliquadráticas e controladores LPV resultam em uma região maior.

Na segunda seção do Capítulo 4 foi apresentada uma extensão da condição baseada em uma função poliquadrática. Foi proposto o projeto de um controlador LPV com uma ação proporcional sobre os estados do sistema e uma ação integral sobre o erro de rastreamento. Além disso, essa condição garantiu o desempenho do sistema LPV em malha fechada com uma taxa de contratividade da função Lyapunov. Foram realizados dois tipos de ensaio com esta condição: um para rastreamento de referência e outro para regulação em torno de um determinado ponto de ajuste, ambos ensaios foram realizados para dois limites da saturação, com $\rho = 15\%$ e $\rho = 25\%$. A ilustração do método de projeto foi realizada em um sistema de tanques acoplados não lineares de segunda ordem, modelados como um sistema *quasi*-LPV. Os experimentos em tempo real mostraram a eficácia do procedimento do projeto que também garantiu um índice de desempenho, fornecido pela contratividade da função de Lyapunov. Para o primeiro ensaio realizado, foi possível perceber que os controladores projetados direcionam o nível para o valor desejado com um erro de estado

estacionário nulo, como era o esperado. Além disso, os resultados obtidos para o limite de saturação equivalente a 25% foram mais agressivos, com um tempo de resposta mais rápida e menor tempo de subida. Os resultados obtidos com o segundo ensaio também foram satisfatórios. Os controladores conseguiram manter o nível de água desejado pelo projetista mesmo com a inserção de perturbação. Com o limite de saturação menor, o atuador saturava mais. Por fim, foram também caracterizadas as estimativas regiões de atração para ambos limites de saturação. E foi possível notar que a com o limite de 25% era possível inserir uma perturbação maior, visto que a estimativa região de atração foi um pouco maior comparada com a do limite igual a 15%.

Dessa forma, concluiu-se que a abordagem usando uma função de Lyapunov poli-quadrática resulta em estimativas de regiões de atração menores do que as usando uma polinomial homogênea, que em contrapartida necessita de um custo computacional maior que a primeira. Porém, isso é relativo, depende do sistema. No processo dos tanques acoplados, por exemplo, utilizando uma função de Lyapunov polinomial homogênea não fez diferença na região de atração, mesmo considerando um grau igual a 3 ou mais, sendo uns dos motivos de não colocar essa ilustração no trabalho.

5.2 Trabalhos desenvolvidos

Nesta parte serão apresentados todos os trabalhos realizados durante o curso de mestrado e que apresentam os resultados obtidos com esta dissertação:

1. Publicado:

- Estabilização Poliquadrática Local de Sistemas Sujeitos a Atuadores Saturantes (Figueiredo *et al.*, 2019): Esse artigo investiga o problema da estabilização local para sistemas discretos no tempo com parâmetros variantes no tempo, LPV, e sujeitos a atuadores saturantes. É proposta uma condição convexa para projetar controladores por realimentação de estados do tipo LPV, que estabilizam local e poliquadraticamente a malha fechada para um conjunto de condições iniciais. Esse conjunto é obtido a partir da interseção de elipsóides obtidos por meio de uma função de Lyapunov dependente de parâmetros. A abordagem baseia-se em uma condição para estabilização poliquadrática de sistemas lineares publicada recentemente por Pandey & de Oliveira (2017) que permite levar em conta a dependência paramétrica na matriz de entrada do modelo do sistema. A condição proposta é ilustrada por meio de dois exemplos numéricos. Esse artigo foi publicado no 14° Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI).

2. Submetido:

- *Design of saturating state feedback control laws for discrete-time LPV systems through homogeneous polynomial parameter-dependent functions*: As principais contribuições desse artigo são novas condições convexas para sintetizar controladores de ganhos de estado racionais dependentes de parâmetros, garantindo a estabilidade local do sistema LPV sujeito a atuadores saturantes para um conjunto de condições iniciais. São propostas duas condições de projeto utilizando uma estrutura baseada em parâmetros polinomiais homogêneos (HPPD) nas variáveis matriciais. Graças a um conjunto de níveis definido a partir de uma função Lyapunov baseada em HPPD, obtém-se estimativas menos conservadoras da região de atração. Dois exemplos ilustram os aspectos numéricos das condições propostas. Este artigo foi submetido a um periódico internacional.
- *Design of LPV-PI-like controller with guaranteed performance for discrete-time systems under saturating actuators*: Esse artigo apresenta novas condições para projetar controladores (LPV) para sistemas LPV sujeitos a atuadores saturantes. O projeto proposto garante uma taxa mínima de contratividade de uma função Lyapunov associada. Uma estrutura proporcional integral (PI) é empregada para garantir erro de rastreamento nulo para sinais de referência constantes por partes. Ensaios experimentais conduzidos em um controle de nível não linear de segunda ordem ilustram o potencial da abordagem proposta. Além disso, os testes indicam como a taxa de contratividade afeta o tamanho da estimativa região de atração. Este artigo foi aceito para a *International Federation of Automatic Control (IFAC, 2020)*.

3. Em preparação:

- *Local input-to-state stabilization of constrained polynomial-LPV systems under saturating actuators*: Esse artigo investiga condições de síntese de controladores por realimentação de estados para sistemas LPV polinomiais contínuos no tempo com atuadores saturantes sujeito a perturbação limitada. As condições convexas garantem estabilidade local do sistema de malha fechada para um conjunto de condições iniciais e para sinais de perturbações limitados por energia. Para resolver as restrições é empregada a soma de quadrados das matrizes. Considera-se também na abordagem realizada o ganho \mathcal{L}_2 para garantir robustez no controlador.

5.3 Trabalhos futuros

Como trabalhos futuros seria interessante inserir algum índice de desempenho nas condições investigadas no Capítulo 3, como por exemplo o λ -contratividade, a minimização do ganho \mathcal{L}_2 , entre outros.

Em geral, considerando todas as condições apresentadas neste trabalho, seria possível também como um trabalho futuro utilizar o sistema LPV como polinomial nos estados, assim, as condições apresentariam uma formulação mais geral o que tenderia em resultados menos conservadores. Para tratar a estabilização de sistemas LPV polinomiais poderia utilizar relaxações baseadas em somas de quadrados, mais conhecidas como SOS (do inglês, *Sum of Square*).

Uma outra possibilidade de trabalho seria a utilização de uma nova forma geométrica para caracterizar a estimativa região de atração. No caso deste trabalho utiliza elipsóides, mas poderia utilizar outros formatos como uma possível maneira de melhorar a representação da região de atração.

Complemento de Schur

Nesta parte é apresentado o complemento de Schur, que é uma ferramenta matemática utilizada para alcançar as condições propostas nos capítulos 3 e 4.

O complemento de Schur é uma relação entre submatrizes contidas em uma matriz. Seja Q e R matrizes simétricas, então a condição

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{A.1})$$

é equivalente a

$$R \geq 0, \quad Q - S^T R^{-1} S \geq 0.$$

Assim, o complemento de Schur da submatriz R corresponde à seguinte expressão:

$$Q - S^T R^{-1} S \geq 0. \quad (\text{A.2})$$

Referências

- Agulhari, C. M., Felipe, A., Oliveira, R. C. L. F., & Peres, P. L. D. 2019. Algorithm 998: The Robust LMI Parser - A toolbox to construct LMI conditions for uncertain systems. *ACM Transactions on Mathematical Software*, **45**(3), 36:1–36:25.
- Almeida, H. L. S., Bhaya, A., Falcão, D. M., & Kaszkurewicz, E. 2001. A team algorithm for robust stability analysis and control design of uncertain time-varying linear systems using piecewise quadratic Lyapunov functions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **11**(4), 357–371.
- Bertolin, A. L. J., Oliveira, R. C. L. F., De Oliveira, M. C., & Peres, P. L. D. 2018. LMI-based stability tests for LPV and switched discrete-time linear systems through redundant equations. *IFAC-PapersOnline*, **51**(26), 149–154.
- Blesa, J., Jiménez, P., Rotondo, D., Nejjari, F., & Puig, V. 2014. An interval NLPV parity equations approach for fault detection and isolation of a wind farm. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **62**(6), 3794–3805.
- Bliman, P-A. 2004. A convex approach to robust stability for linear systems with uncertain scalar parameters. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **42**(6), 2016–2042.
- Bosche, J., Rabhi, A., & Hajjaji, A. El. 2017. A robust stabilization method for a saturated LPV system: application to the lateral dynamics of vehicles. *IFAC-PapersOnline*, **50**(1), 3732–3737.
- Boyd, S., Ghaoui, L. El, Feron, E., & Balakrishnan, V. 1994. *Linear matrix inequalities in systems and control theory*. Philadelphia, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics.
- Briat, C. 2015. *Linear parameter-varying and time-delay systems: Analysis, observation, filtering & control*. Advances in Delays and Dynamics, vol. 3. Berlin: Springer-Verlag.

- Chesi, G., Garulli, A., Tesi, A., & Vicino, A. 2007. Robust stability of time-varying polytopic systems via parameter-dependent homogeneous Lyapunov functions. *Automatica*, **43**(2), 309–316.
- Corradini, M. L., Cristofaro, A., Giannoni, F., & Orlando, G. 2012. *Control systems with saturating inputs: Analysis tools and advanced design*. Vol. 424. Springer Science & Business Media.
- Corso, J., Castelan, E., Moreno, U. F., & Pieri, E. R. De. 2009. Controle dependente de parâmetros para uma classe de sistemas não-lineares incertos com atuadores saturantes. *Controle & Automação*, **20**(2), 119–132.
- Daafouz, J., & Bernussou, J. 2001. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*, **43**(5), 355–359.
- De Souza, C., Leite, V. J. S., Castelan, E. B., & Silva, L. F. P. 2018. ISS Stabilization of discrete-time LPV systems with interval time-varying state delay and saturating actuators. *IFAC-PapersOnline*, **51**(26), 143–148.
- Delibaş, A., Kucukdemiral, I. B., & Cansever, G. 2013. \mathcal{L}_2 control of LPV systems with saturating actuators: Pólya Approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **34**, 17–34.
- Fialho, I. J., & Balas, G. J. 2000. Design of nonlinear controllers for active vehicle suspensions using parameter-varying control synthesis. *Vehicle System Dynamics*, **33**(5), 351–370.
- Figueiredo, L. S., Lacerda, M. J., & Leite, V. J. S. 2019. Estabilização poliquadrática local de sistemas sujeitos a atuadores saturantes. In: *14^o Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*.
- Geromel, J. C., & Colaneri, P. 2006. Robust stability of time varying polytopic systems. *Systems & Control Letters*, **55**(1), 81–85.
- Ghiggi, I. M. F. 2008. *Controle de sistemas com atrasos no tempo na presença de atuadores saturantes*. Ph.D. thesis, Programa de pós-graduação em engenharia elétrica-Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS.
- Giarré, L., Bauso, D., Falugi, P., & Bamieh, B. 2006. LPV model identification for gain scheduling control: An application to rotating stall and surge control problem. *Control Engineering Practice*, **14**(4), 351–361.

- Gomes da Silva Jr., J. M., & Tarbouriech, S. 2005. Antiwindup design with guaranteed regions of stability: an LMI-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **50**(1), 106–111.
- Gomide, T. S., & Lacerda, M. J. 2018. Stability analysis of discrete-time switched systems under arbitrary switching. *IFAC-PapersOnline*, **51**(25), 371–376.
- Hardy, G. H., Littlewood, J. E., & Pólya, G. 1952. *Inequalities*. Cambridge University Press.
- Hingwe, P., Tan, H. S., Packard, A. K., & Tomizuka, M. 2002. Linear parameter varying controller for automated lane guidance: experimental study on tractor-trailers. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **10**(6), 793–806.
- Jungers, M., & Castelan, E. B. 2011. Gain-scheduled output control design for a class of discrete-time nonlinear systems with saturating actuators. *Systems & Control Letters*, **60**(3), 169–173.
- Khalil, H. K. 2002. *Nonlinear systems*. 3 edn. Prentice hall Upper Saddle River, NJ.
- Lee, C. H., Shin, M. H., & Chung, M. J. 2001. A design of gain-scheduled control for a linear parameter varying system: an application to flight control. *Control Engineering Practice*, **9**(1), 11–21.
- Leite, V. J. S., & Peres, P. L. D. 2004. Robust control through piecewise lyapunov functions for discrete time-varying uncertain systems. *International Journal of Control*, **77**(3), 230–238.
- Lopes, A. N. D., Leite, V. J. S., Silva, L. F. P., & Sousa, A. C. 2017. Estabilização local de sistemas não lineares via modelagem fuzzy Takagi-Sugeno discreta no tempo. *XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*.
- Lopes, A. N. D., Leite, V. J. S., Silva, L. F. P., & Guelton, K. 2020. Anti-windup TS fuzzy PI-like control for discrete-time nonlinear systems with saturated actuators. *International Journal of Fuzzy Systems*, 1–16.
- Lu, B., Wu, F., & Kim, S. 2006. Switching LPV control of an F-16 aircraft via controller state reset. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **14**(2), 267–277.
- Mohammadpour, J., & Scherer, C. W. (eds). 2012. *Control of linear parameter varying systems with applications*. New York: Springer Science & Business Media.

- Montagner, V. F., Oliveira, R. C. L. F., Peres, P. L. D., Tarbouriech, S., & Queinnec, I. 2007. Gain-scheduled controllers for linear parameter-varying systems with saturating actuators: LMI-based design. *Pages 6067–6072 of: Proc. of the 2007 American Control Conference.*
- Oliveira, R. C. L. F. 2006. *Estudo de robustez em sistemas lineares por meio de relaxações em termos de desigualdades matriciais lineares.* Ph.D. thesis, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação-Universidade Estadual de Campinas.
- Oliveira, R. C. L. F., & Peres, P. L. D. 2007. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **52**(7), 1334–1340.
- Oliveira, R. C. L. F., De Oliveira, M. C., & Peres, P. L. D. 2009. Special time-varying Lyapunov function for robust stability analysis of linear parameter varying systems with bounded parameter variation. *IET Control Theory & Applications*, **3**(10), 1448–1461.
- Onat, C., Kucukdemiral, I. B., Sivrioglu, S., & Yuksek, I. 2007. LPV model based gain-scheduling controller for a full vehicle active suspension system. *Journal of Vibration and Control*, **13**(11), 1629–1666.
- Paim, C. 2003. *Análise e controle de sistemas lineares sujeitos a saturação.* Ph.D. thesis, Programa de pós graduação em engenharia elétrica- Universidade Federal de Santa Catarina.
- Palmeira, A. H. K., Gomes da Silva Jr., J. M., & Flores, J. V. 2018. Aperiodic sampled-data control for LPV systems under input saturation. *IFAC-PapersOnline*, **51**(26), 130–136.
- Pandey, A., & De Oliveira, M. C. 2018. On the necessity of LMI-based design conditions for discrete time LPV filters. *IEEE Transactions on Automatic Control.*
- Pandey, A. P., & de Oliveira, M. C. 2017. A new discrete-time stabilizability condition for Linear Parameter-Varying systems. *Automatica*, **79**, 214–217.
- Pessim, P. S. P., & Lacerda, M. J. 2018. Stability and control design for linear parameter-varying discrete-time systems. *Department of Electrical Engineering Federal University of São João Del-Rei UFSJ.*
- Robles, R., Sala, A., & Bernal, M. 2018. Performance-oriented quasi-LPV modeling of nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **29**(5), 1230–1248.

- Rosa, T. E., Morais, C. F., & Oliveira, R. C. L. F. 2017. \mathcal{H}_∞ output-Feedback Gain-scheduled control for discrete-time linear systems affected by time-varying parameters. *IFAC-PapersOnline*, **50**(1), 8618–8623.
- Sename, O., Gaspar, P., & Bokor, J. (eds). 2013. *Robust control and linear parameter varying approaches: application to vehicle dynamics*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 437. Berlin: Springer-Verlag.
- Sousa, A. C., Leite, V. J. S., & Rubio Scola, I. 2018. Affordable Control Platform with MPC Application. *Studies in Informatics and Control*, **27**(3), 265–274.
- Steinbuch, M., de Molengraft, M. J. G. Van, & j. Van Der Voort, A. 2003. Experimental modelling and LPV control of a motion system. *Pages 1374–1379 of: Proceedings of the 2003 American Control Conference, ACC: June 4-6, 2003, Denver, Colorado, USA. vol. 2*. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE).
- Sturm, J. F. 1999. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, **11**(1–4), 625–653. <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>.
- Tan, W., Packard, A. K., & Balas, G. J. 2000. Quasi-lpv modeling and lpv control of a generic missile. *Pages 3692–3696 of: Proceedings of the 2000 american control conference. acc (iee cat. no. 00ch36334)*, vol. 5. IEEE.
- Tarbouriech, S., Garcia, G., Gomes da Silva Jr., J. M., & Queinnec, I. 2011. *Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators*. Springer Science & Business Media.
- Trofino, A., BARBOSA, K., & COUTINHO, D. 2000. Controle robusto. *Apostila da disciplina de controle robusto do curso de pós-graduação de engenharia elétrica da UFSC*.
- Wang, M., Qiu, J., & Feng, G. 2018. Finite frequency memory output feedback controller design for T-S fuzzy dynamical systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **26**(6), 3301–3313.
- Yang, H., Xia, Y., & Geng, Q. 2019. *Analysis and synthesis of delta operator systems with actuator saturation*. Vol. 193. Springer.